Corrigé de l'examen final de langages et systèmes formels

ÉNSIIE, semestre 3

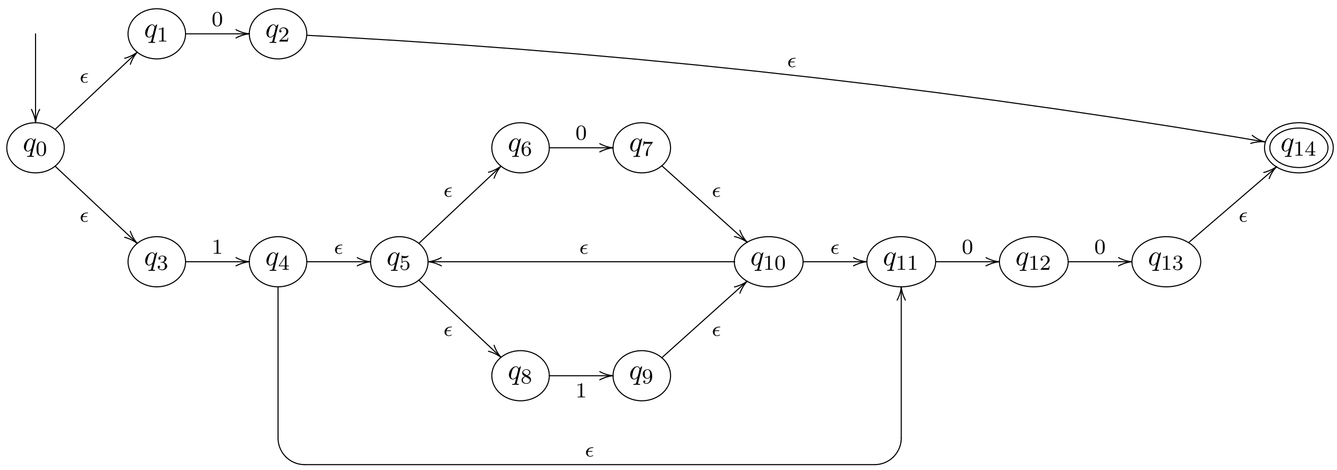
jeudi 24 novembre 2016

Exercice 1 :

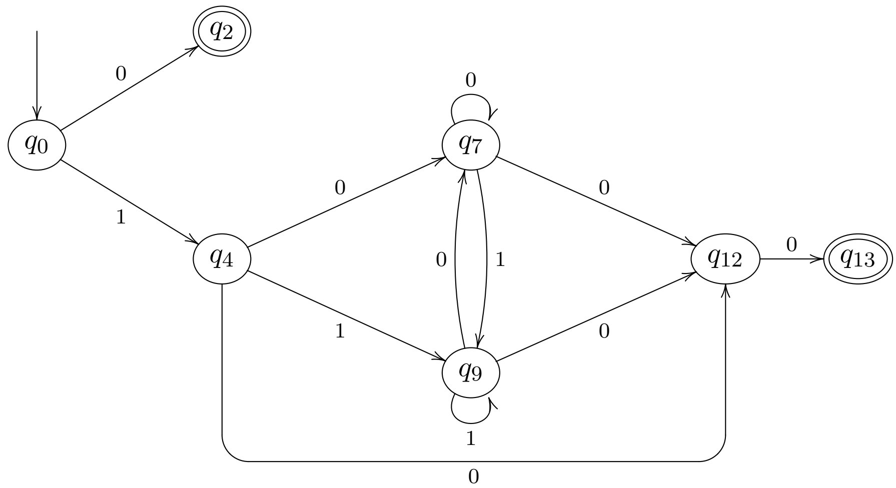
1. En binaire, si on met de côté 0, les entiers naturels multiples de 4 se terminent par deux 0. Comme on ne veut pas de 0 non significatifs, ils commencent par 1. On a donc

$$0 \ + \ 1(0+1)*00$$

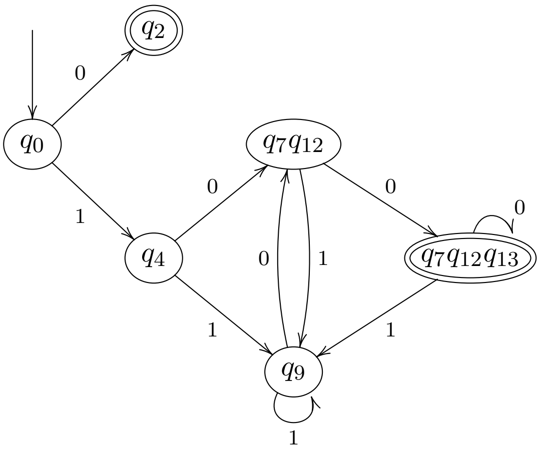
2.



3.



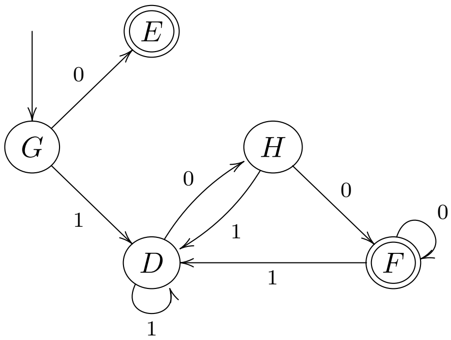
4.



5.

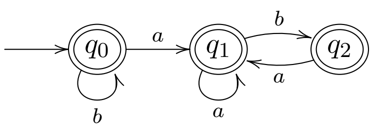
	q_0	q_4	q_7q_{12}	q_9	q_2	$q_7q_{12}q_{13}$
$\equiv_0$	A				B	
$\xrightarrow{0}$	B	A	B	A		B
$\xrightarrow{1}$	A	A	A	A		A
$\equiv_1$	C	D	C	D	E	F
$\xrightarrow{0}$	E	C	F	C		F
$\xrightarrow{1}$	D	D	D	D		D
$\equiv_2$	G	D	H	D	E	F
$\xrightarrow{0}$	E	H	F	H		F
$\xrightarrow{1}$	D	D	D	D		D
$\equiv_3$	G	D	H	D	E	F

Attention, on divise les classes ayant des images différentes, mais on ne regroupe pas des états venant de classes différentes : dans $\equiv_1$ on ne peut pas regrouper q_0 et q_7q12 avec $q_7q_{12}q_{13}$.
On obtient :



Exercice 2 : (5 pts)

1. Par exemple



2.

$$A_0 \to bA_0 \mid aA_1 \mid \epsilon$$
$$A_1 \to aA_1 \mid bA_2 \mid \epsilon$$
$$A_2 \to aA_1 \mid \epsilon$$

3.

$$\begin{cases} X_0 = bX_0 + aX_1 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_1 + \epsilon \end{cases}$$

Méthode systématique : On utilise le lemme d'Arden de haut en bas en remplaçant dans les équations suivantes

$$\begin{cases} X_0 = b*(aX_1 + \epsilon) \\ X_1 = a*(bX_2 + \epsilon) \\ X_2 = aa*(bX_2 + \epsilon) + \epsilon \end{cases}$$

La troisième équation se simplifie en

$$X_2 = (a+)bX_2 + (a+) + \epsilon = (a+)bX_2 + a*$$

On utilise le lemme d'Arden de bas en haut en remplaçant dans les équations précédentes :

$$\begin{cases} X_2 = ((a+)b)*a* \\ X_1 = a*(b((a+)b)*a* + \epsilon) \\ X_0 = b*((a+)(b((a+)b)*a* + \epsilon) + \epsilon) \end{cases}$$

Une expression régulière pour M est donc $b*((a+)(b((a+)b)*a* + \epsilon) + \epsilon)$.

Autre possibilité : On remplace X_2 par son membre droit dans la deuxième équation :

$$X_1 = aX_1 + b(aX_1 + \epsilon) + \epsilon = (a + ba)X_1 + b + \epsilon$$

On applique le lemme d'Arden :

$$X_1 = (a + ba)*(b + \epsilon)$$

On applique le lemme d'Arden dans la première équation :

$$X_0 = b*(aX_1 + \epsilon)$$

et on remplace X_1 par ce qu'on a trouvé :

$$X_0 = b*(a(a + ba)*(b + \epsilon) + \epsilon$$

Une expression régulière pour M est donc

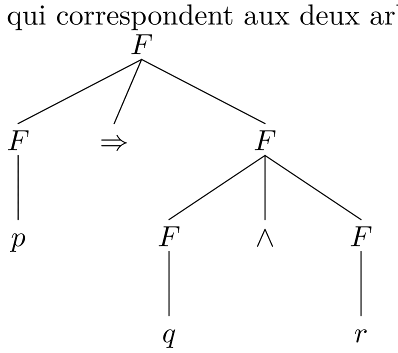
$$b*(a(a + ba)*(b + \epsilon) + \epsilon)$$

Exercice 3 : (8 pts)

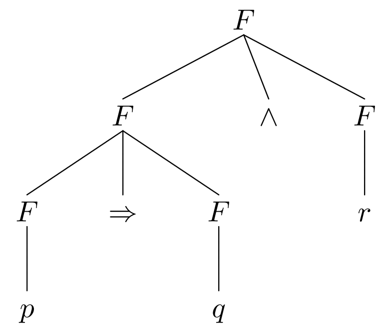
1. Sur le mot $p \Rightarrow q \wedge r$ on a deux dérivations **les plus à gauche** possible :

$$F \to F \Rightarrow F \to p \Rightarrow F \to p \Rightarrow F \wedge F \to p \Rightarrow q \wedge F \to p \Rightarrow q \wedge r$$
$$F \to F \wedge F \to F \Rightarrow F \wedge F \to p \Rightarrow F \wedge F \to p \Rightarrow q \wedge F \to p \Rightarrow q \wedge r$$

qui correspondent aux deux arbres de dérivation :

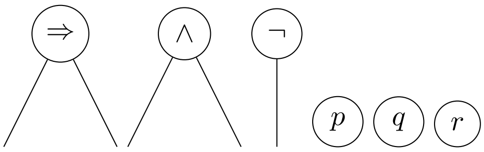


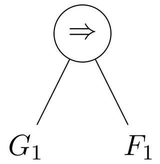
et



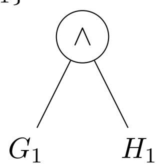
2.

$$
\begin{aligned}
F &\to G \Rightarrow F \mid G\\
G &\to G \land H \mid H\\
H &\to \neg H \mid p \mid q \mid r \mid (F)
\end{aligned}
$$

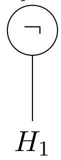
3. On dispose des nœuds de syntaxe : 
   On ajoute les actions :

$F \to \quad G \Rightarrow F$ 

$\mid \quad G \qquad \{G_1\}$

$G \to \quad G \land H$ 

$\mid \quad H \qquad \{H_1\}$

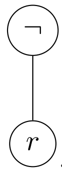
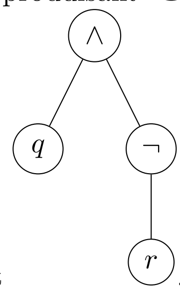
$H \to \quad \neg H$ 

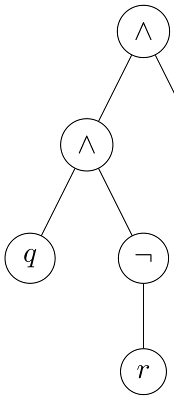
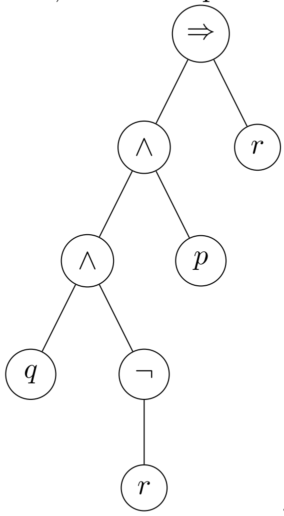
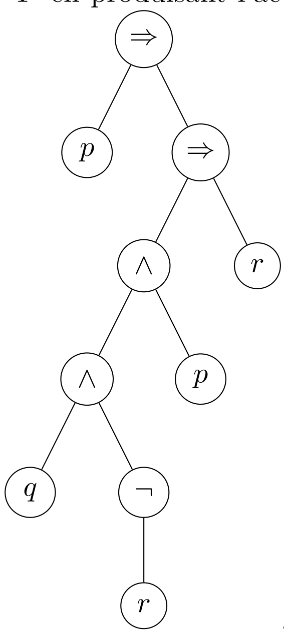
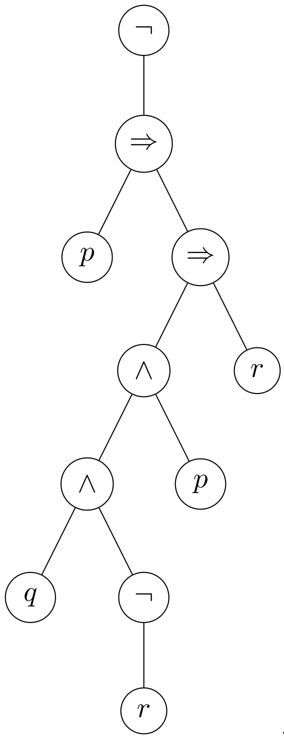
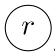
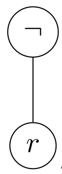
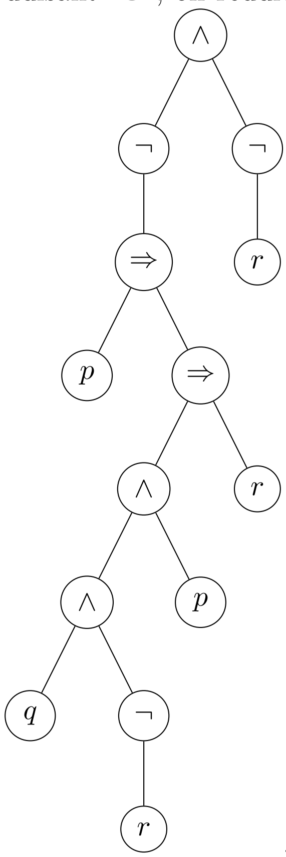
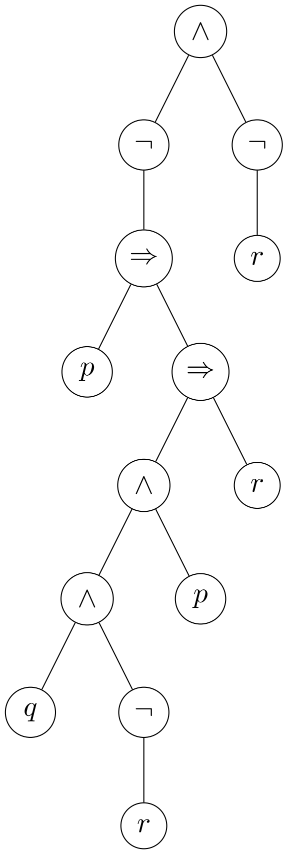
$\mid \quad p \qquad \{ p \}$

$\mid \quad q \qquad \{ q \}$

$\mid \quad r \qquad \{ r \}$

$\mid \quad (F) \qquad \{F_1\}$

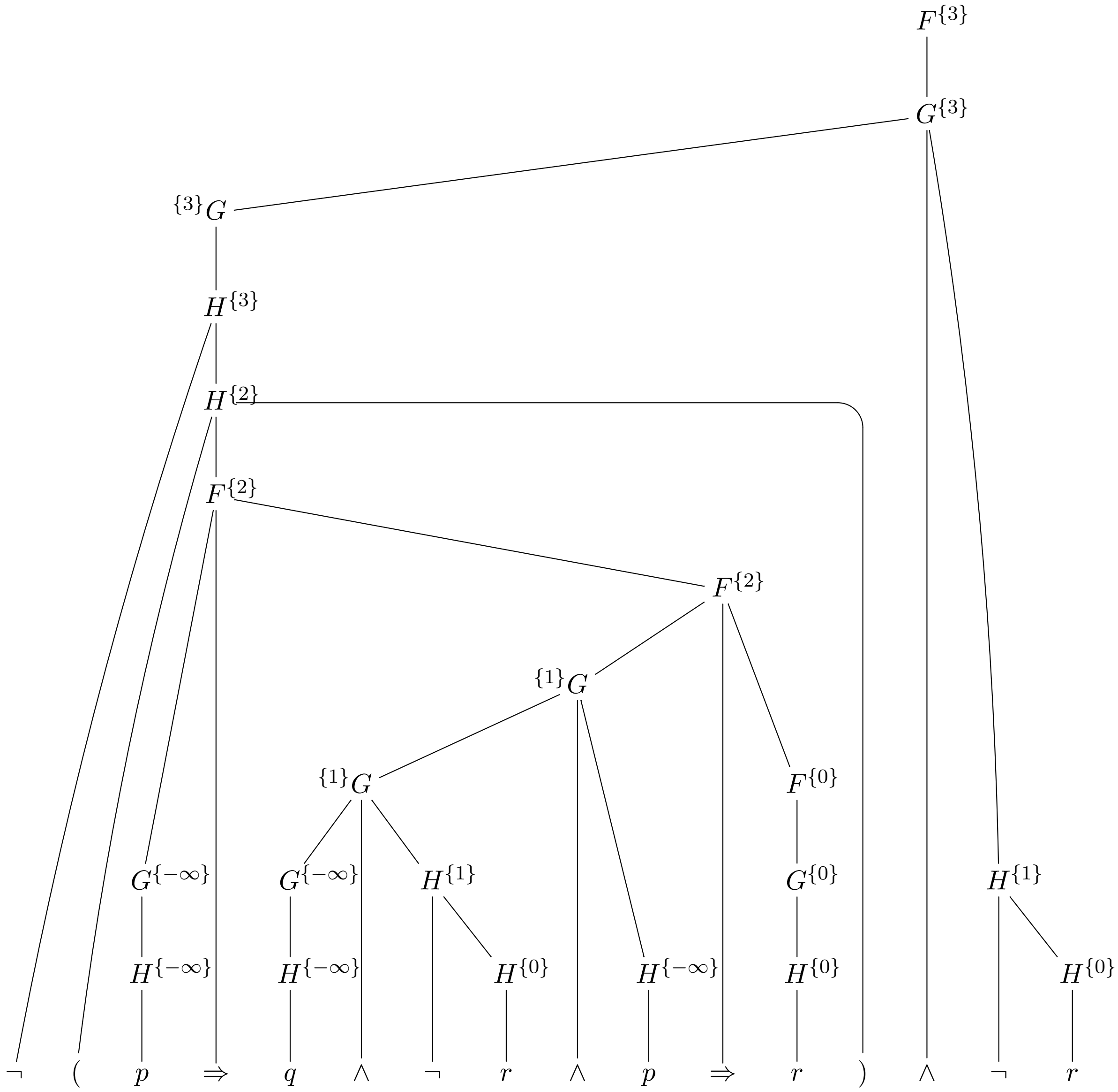
4. On décale $\neg$, on décale (, on décale p, on réduit par $H \to p$ en produisant l'action p, on réduit par $G \to H$ en produisant la même action, on décale $\Rightarrow$, on décale q, on réduit par $H \to q$ en produisant q, on réduit par $G \to H$ avec la même action, on décale $\land$, on décale $\neg$, on décale r, on réduit par $H \to r$ en produisant r, on réduit par $H \to \neg H$ en produisant , on réduit par $G \to G \land H$ en produisant , on décale $\land$, on décale p, on réduit par $H \to p$ en produisant l'action p,

on réduit par $G \to G \wedge H$ en produisant  , on décale $\Rightarrow$, on décale r, on réduit par $H \to r$ en produisant r, on réduit par $G \to H$ avec la même action, on réduit par $F \to G$ avec la même action, on réduit par $F \to G \Rightarrow F$ en produisant l'action  , on réduit par $F \to G \Rightarrow F$ en produisant l'action  , on décale), on réduit $H \to (F)$ en produisant la même action, on réduit par $H \to \neg H$ en produisant , on réduit en $G \to H$ avec la même action, on décale $\wedge$, on décale $\neg$, on décale r, on décale $\neg$, on décale r, on réduit par $H \to r$ en produisant , on réduit par $H \to \neg H$ en produisant , on réduit par $G \to G \wedge H$ en produisant , on réduit par $F \to G$ qui produit donc l'arbre de syntaxe abstraite final :  (Cf. 6. pour l'arbre de dérivation, auquel il faut attacher les résultats des actions à chaque réduction.)

5.

$$
\begin{array}{rlll}
F \to & G \Rightarrow F & \{\max(G_1+1, F_1)\} \\
| & G & \{G_1\} \\
G \to & G \wedge H & \{\max(G_1, H_1)\} \\
| & H & \{H_1\} \\
H \to & \neg H & \{H_1+1\} \\
| & p & \{-\infty\} \\
| & q & \{-\infty\} \\
| & r & \{0\} \\
| & (F) & \{F_1\}
\end{array}
$$

6.



La profondeur de négation de r est donc 3.