Un algorithme de génération de colonnes pour le problème du voyageur de commerce

Le problème du voyageur de commerce consiste à trouver un parcours de n villes tel que l'on passe une fois (et une seule) par chaque ville et tel que la distance parcourue (le coût du parcours) soit minimum.

On considère K_n le graphe complet de sommets $1, 2, ..., n$. Un 1-graphe est un graphe partiel de K_n tel que les sommets de 2 à n sont couverts par un arbre et le sommet 1 est de degré 2. La figure 1 donne un exemple de 1-arbre de 5 sommets.

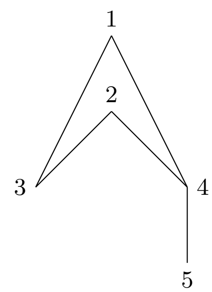

Figura 1: exemple de 1-arbre à 5 sommets

Le vecteur d'incidence d'un 1-arbre T est un vecteur x indexé par les arêtes de K_n tel que $x_e = 1$ si $e \in T$ et $x_e = 0$ sinon. Par exemple, pour le 1-arbre de la figure 1 , $x_{13} = x_{14} = x_{23} = x_{24} = x_{45} = 1$ et pour les autres arêtes e , $x_e = 0$.

Un 1-arbre tel que tous les sommets sont de degré 2 est un cycle parcourant tous les sommets (un tour). Le vecteur d'incidence d'un 1-arbre T est un vecteur x indexé par les arêtes de K_n tel que $x_e = 1$ si $e \in T$ et $x_e = 0$ sinon. Par exemple, pour le 1-arbre de la figure 1 , $x_{13} = x_{14} = x_{23} = x_{24} = x_{45} = 1$ et pour les autres arêtes e , $x_e = 0$.

Un 1-arbre tel que tous les sommets sont de degré 2 est un cycle parcourant tous les sommets (un tour).

On note E l'ensemble des arêtes de K_n, $\delta(j)$ l'ensemble des arêtes de K_n incidentes au sommet j, X l'ensemble des vecteurs d'incidence des 1-arbre, c_e le coût (de parcours) de l'arête e.

On peut formuler le problème du voyageur de commerce par le programme (P) suivant:

$$\min_{x \in X} \sum_{e \in E} c_e x_e \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{e \in \delta(j)} x_e = 2, \forall j = 2, ..., n & (2) \\ x \in X & (3) \end{cases}$$

La contrainte (2) stipule que les degrés des sommets de 2 à n doivent être égaux à 2. La contrainte (3) stipule que x parcourt l'ensemble des 1-arbre de K_n.

0.1 Question 1

On note χ_i le 1-arbre numéro i de X et λ_i la variable de décision associée: $\lambda_i = 1$ si le 1-arbre i est choisi et $\lambda_i = 0$ sinon.

Ecrire (P) en extension , c'est-à-dire avec les variables λ_i . On note (M) le problème obtenu.

0.2 Question 2

On considère (ML) la relaxation continue de (M) où λ_i en 0-1 est remplacée par $\lambda_i \geq 0$.

On note μ_j la variable duale associée à la contrainte du sommet j ($j = 2, ..., n$) de (ML) et η la variable duale associée à la contrainte de convexité.

Donner l'expression du coût réduit d'une variable λ_i.

Le sous-problème consiste à trouver une variable λ_i de côut réduit minimum. Montrer que le sous-problème se formule de la façon suivante:

$$\min_{x \in X} \sum_{e=(j,j') \in E} (c_e - \mu_j - \mu_{j'}) x_e - \eta \quad (4)$$

Le sous-problème revient donc à affecter à chaque arête $e = (j, j')$ un coût (poids) $c_e - \mu_j - \mu_{j'}$ puis à chercher un 1-arbre de coût (poids) minimum. Sachant que l'algorithme de Kruskal permet de trouver un arbre de poids minimum en $O(n^2)$, en déduire un algorithme pour trouver un 1-arbre de coût (poids) minimum. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

0.3 Question 3

On considère maintenant l'instance $n = 5$ sommets avec la matrice de coût suivante:

$$\begin{pmatrix} . & 7 & 2 & 1 & 5 \\ . & . & 3 & 6 & 8 \\ . & . & . & 4 & 2 \\ . & . & . & . & 9 \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

0.3.1 Question 3.1

Donner (MLR) le problème maître restreint aux colonnes (1-arbre) décrites dans les figures 2, 3, 4 ci-dessous.

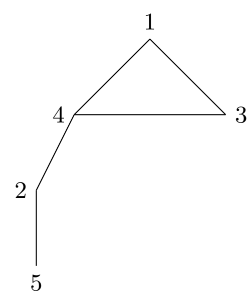

Figura 2: 1-arbre numéro 1

0.3.2 Question 3.2

On résout (MLR) et on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$. On trouve comme variables duales $\mu_2 = 2, \mu_3 = 0, \mu_4 = 2 + \frac{1}{3}, \mu_5 = 2 - \frac{1}{3}, \eta = 8 + \frac{1}{3}$.

Résoudre le sous-problème et donner la colonne (1-arbre) entrante. Donner un encadrement de la valeur de (ML).

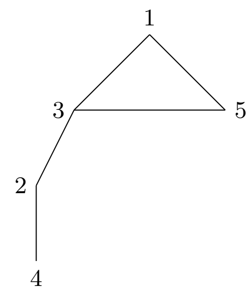

Figura 3: 1-arbre numéro 2

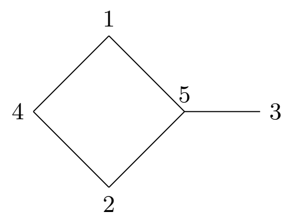

Figura 4: 1-arbre numéro 3

0.3.3 Question 3.3

On rajoute la nouvelle colonne à (MLR) . On résout à nouveau et on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{2}$. On trouve comme variables duales $\mu_2 = 3, \mu_3 = \mu_4 = 0, \mu_5 = 4, \eta = 4$.

Résoudre le sous-problème et donner la colonne (1-arbre) entrante.

Que remarque-t-on de particulier au niveau des degrés des sommets de cette colonne?

Quel est le coût de cette colonne (ce 1-arbre)?

Donner un encadrement de la valeur de (ML). En déduire que l'on a trouvé la solution optimale de (ML) et même de (M).