Nom , prénom : …

CORO - 6 Juin 2013 - Génération de colonnes

On désire construire une ligne de chemin de fer qui relie 5 villes V1,…,V5. Les coûts de construction des tronçons entre chaque ville sont donnés ci-dessous :

Coûts c	V1	V2	V3	V4	V5
V1	*	7	2	1	5
V2		*	3	6	8
V3			*	4	2
V4				*	9
V5					*

La ligne aura deux extrémités et des stations intermédiaires. Le coût de construction d'une ligne est la somme des coûts de construction des tronçons. Par exemple, la ligne V1-V2-V3-V4-V5 coûte 23. On cherche à construire la ligne de coût minimal. Le problème revient à chercher une chaine hamiltonienne de coût minimum dans le graphe complet K_5 de sommets {V1,…,V5} et d'arêtes E={(V1,V2), (V1,V3),…, (V4,V5)}. On modélise le problème de la façon suivante :

(Pb) $\min_x f(x) = \sum_{e \in E} c_e x_e \; s.c. \begin{cases} g_j(x) = 2 - \sum_{e \in \delta(Vj)} x_e \geq 0 \; j = 1, \dots, 5 \\ x \in X \end{cases}$

Où X est l'ensemble des vecteurs d'incidence des arbres couvrants de K_5.

δ(Vj) est l'ensemble des arêtes incidentes à Vj. Les contraintes du problème (Pb) reviennent à chercher des arbres couvrants tels que le degré de chaque sommet soit au plus deux.

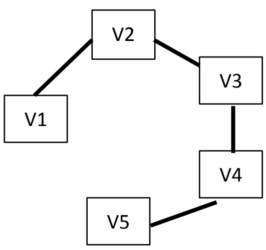
On considère la relaxation de (Pb) où x∈X est remplacé par x∈ConvX. Les vecteurs de X sont notés $x^{(i)}$ pour i=1 à |X|. Le problème relaxé s'écrit :

(P') $\min_\lambda \sum_{i=1}^{|X|} \lambda_i f\left(x^{(i)}\right) \;\; s.c. \begin{cases} \sum_{i=1}^{|X|} \lambda_i \, g_j\left(x^{(i)}\right) \geq 0 \; j = 1, \dots, 5 \\ \sum_{i=1}^{|X|} \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, |X| \end{cases}$

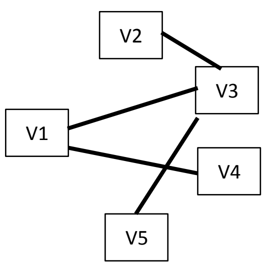
Le cardinal de X est grand et donc (P') comporte de nombreuses variables. On attaque donc la résolution de (P') par un algorithme de génération de colonnes.

On considère les 4 arbres couvrants $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ et $x^{(4)}$, ci-dessous :

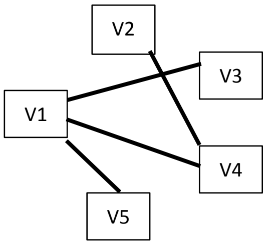
$X^{(1)}$



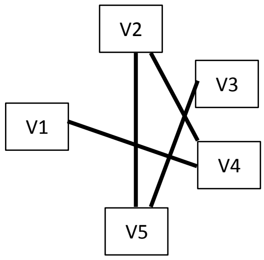
$X^{(2)}$



$X^{(3)}$



$X^{(4)}$



1-(P'R) est le problème (P') restreint aux colonnes $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ et $x^{(4)}$. On a écrit ci-dessous (PR') pour les deux premières colonnes. Compléter .

$$min 23\lambda_1 + 8\lambda_2 + \ \ldots \ \lambda_3 + \ \ldots \ \lambda_4$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \lambda_1 + 0\lambda_2 + \ \ldots \ \lambda_3 + \ \ldots \ \lambda_4 \geq 0 & (V1) \\ 0\lambda_1 + \lambda_2 + \ \ldots \ \lambda_3 + \ \ldots \ \lambda_4 \geq 0 & (V2) \\ 0\lambda_1 - \lambda_2 + \ \ldots \ \lambda_3 + \ \ldots \ \lambda_4 \geq 0 & (V3) \\ 0\lambda_1 + \lambda_2 + \ \ldots \ \lambda_3 + \ \ldots \ \lambda_4 \geq 0 & (V4) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ \ldots \ \lambda_3 + \ \ldots \ \lambda_4 \geq 0 & (V5) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ \ldots \ \lambda_3 + \ \ldots \ \lambda_4 = 1 & (convexité) \\ \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_4 \geq 0 & \end{cases}$$

On note μ_j les variables duales associées aux contraintes Vj j=1,…,5 et η la variable duale associée à la contrainte de convexité. On résout (P'R) et on trouve

$$\mu_1 = 1{,}5 \quad \mu_2 = 0 \quad \mu_3 = 3{,}75 \quad \mu_4 = 0 \quad \mu_5 = 0 \quad \eta = 11{,}75$$

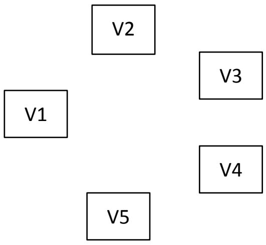
La recherche d'une variable de coût réduit minimum est résolu par le sous-problème suivant :

$\min_{x \in X} f(x) - \sum_{j=1}^{5} \mu_j g_j(x) - \eta$

2-Résoudre le sous-problème. Donner le tableau des coefficients des variables x, donner $x^{(5)}$ la variable entrante et son coût réduit.

Coef.	V1	V2	V3	V4	V5
V1	*	…	…	…	…
V2		*	…	…	…
V3			*	…	…
V4				*	…

$X^{(5)}$



Coût réduit de la variable entrante = …

3-Donner un encadrement de la valeur du problème (P’).

…≤ valeur de (P’) ≤…

4-On résout (P’R) avec la nouvelle colonne $x^{(5)}$. On trouve λ_2=λ_5=0,5 et λ_1=λ_3=λ_5=0. Pour les variables duales :

$$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = 0 \quad \mu_3 = 3 \quad \mu_4 = 0 \quad \mu_5 = 0 \quad \eta = 11$$

On résout à nouveau le sous-problème et on ne trouve pas de variable de coût réduit négatif et donc pas de colonne entrante.

A partir de ce résultat et du résultat de la question 2, donner un encadrement de la valeur du problème (Pb). Justifier la réponse.

…≤ valeur de (Pb) ≤…

Correction.

1-(P'R) est le problème (P') restreint aux colonnes $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ et $x^{(4)}$. On a écrit ci-dessous (PR') pour les deux premières colonnes. Compléter .

$$min 23\lambda_1 + 8\lambda_2 + \ 14\ \lambda_3 + 17\ \lambda_4$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \lambda_1 + 0\lambda_2 - \ \ \lambda_3 + \ \ \lambda_4 \geq 0 & (V1) \\ 0\lambda_1 + \ \lambda_2 + \ \ \lambda_3 + \ \ 0\ \lambda_4 \geq 0 & (V2) \\ 0\lambda_1 - \lambda_2 + \ \ \lambda_3 + \ \ \lambda_4 \geq 0 & (V3) \\ 0\lambda_1 + \lambda_2 + \ 0\ \lambda_3 + \ \ 0\lambda_4 \geq 0 & (V4) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ \ \lambda_3 + \ \ 0\ \lambda_4 \geq 0 & (V5) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ \ \lambda_3 + \ \ \lambda_4 = 1 & (convexité) \\ \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_4 \geq 0 \end{cases}$$

On note μ_j les variables duales associées aux contraintes Vj j=1,…,5 et η la variable duale associée à la contrainte de convexité. On résout (P'R) et on trouve

$$\mu_1 = 1{,}5 \quad \mu_2 = 0 \quad \mu_3 = 3{,}75 \quad \mu_4 = 0 \quad \mu_5 = 0 \quad \eta = 11{,}75$$

La recherche d'une variable de coût réduit minimum est résolu par le sous-problème suivant :

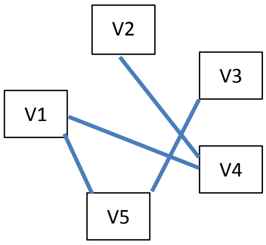
$\min_{x \in X} f(x) - \sum_{j=1}^{5} \mu_j g_j(x) - \eta$

2-Résoudre le sous-problème. Donner le tableau des coefficients des variables x, donner $x^{(5)}$ la variable entrante et son coût réduit.

Coef.	V1	V2	V3	V4	V5
V1	*	8,5	7,25	2,5	6,5
V2		*	6,75	6	8
V3			*	7,75	5,75
V4				*	9

On cherche un arbre couvrant de poids minimum avec les poids ci-dessus.

$X^{(5)}$



Coût réduit de la variable entrante = 20,75 - 2×(1,5 + 3,75)- 11,75 = -1,5

3-Donner un encadrement de la valeur du problème (P').

Coût réduit+η = 10,25 ≤ valeur de (P') ≤ 11,75 = η

4-On résout (P'R) avec la nouvelle colonne $x^{(5)}$. On trouve λ_2=λ_5=0,5 et λ_1=λ_3=λ_5=0. Pour les variables duales :

$$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = 0 \quad \mu_3 = 3 \quad \mu_4 = 0 \quad \mu_5 = 0 \quad \eta = 11$$

On résout à nouveau le sous-problème et on ne trouve pas de variable de coût réduit négatif et donc pas de colonne entrante.

A partir de ce résultat et du résultat de la question 2, donner un encadrement de la valeur du problème (Pb). Justifier la réponse.

(P') est résolu. La valeur de (Pb) est minorée par la valeur de (P') qui vaut 11. Rappelons-nous que (P') est une relaxation de (Pb).

Dans le calcul de notre variable entrante, on a trouvé une chaine eulérienne de poids 14. Rappelons-nous que (Pb) recherche une chaîne eulérienne de poids minimum.

11≤ valeur de (Pb) ≤14