MPRO **2011-2012**

U.E. Programmation Mathématique

Durée : 3h

Notes personnelles et polycopiés autorisés - Ouvrages interdits

Partie 1 (1h15)

1. Soit le programme linéaire

$$(P1)\quad \begin{cases} \min \quad 6x_1+5x_2+6x_3+3x_4+4x_5 \\ \text{sous les contraintes} \quad \left| \begin{array}{l} x_1+2x_2+x_5=5 \\ 4x_2-2x_3=2 \\ 4x_1-2x_2-3x_4+3x_5=0 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Ecrire le tableau du simplexe associé à la solution de base non réalisable : $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 \neq 0,\ x_4 \neq 0,\ x_5 \neq 0$. Rappelons que le tableau du simplexe correspond à l'expression des variables de base en fonction des variables hors base et à l'expression de la fonction économique également en fonction des variables hors base. Montrer que l'on peut, à partir de cette solution de base, appliquer l'algorithme dual du simplexe pour déterminer l'optimum de (P1). Déterminer cet optimum (une itération).

---

2. Soit le problème d'optimisation en variables bivalentes :

$$(P2)\quad \begin{cases} \min \quad 4x_1+3x_2 \\ \text{sous les contraintes} \quad \left| \begin{array}{l} -3x_1-3x_2 \leq -3 \quad (C_1) \\ x_1,x_2 \in \{0,1\} \end{array} \right. \end{cases}$$

Considérer le dual lagrangien de (P2) obtenu en relâchant la contrainte (C_1). Soit λ le multiplicateur de Lagrange. Calculer par énumération : la valeur de la fonction duale pour $\lambda = 2$, la valeur de la fonction duale pour $\lambda = 5$, la valeur optimale du dual (on tracera la fonction duale), la valeur optimale du primal et le saut de dualité.

---

3. Certains logiciels d'optimisation permettent de **minimiser** une fonction quadratique **convexe** soumise ou non à des contraintes linéaires, les variables du problème devant prendre des valeurs entières. Rappelons qu'une fonction quadratique, $q(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} q_{ij} x_i x_j$, est convexe si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} q_{ij} x_i x_j \geq 0$ pour tout x appartenant à R^n. Etant donné un graphe non orienté $G = (X, E)$, on considère le problème consistant à partitionner le graphe en deux sous-ensembles X_1 et X_2 de façon à maximiser le nombre d'arêtes ayant une extrémité dans X_1 et l'autre dans X_2.

3.1. Formuler le problème comme la maximisation d'une fonction quadratique de variables 0-1.

3.2. A partir de la formulation précédente, construire une autre formulation de ce problème permettant de le résoudre en utilisant les logiciels cités ci-dessus. Aucun outil de calcul n'est nécessaire pour établir cette formulation. On utilisera seulement une relation simple entre les expressions $x_i x_j$ et $(x_i + x_j)^2$ lorsque x_i et x_j sont des variables booléennes.