Inégalité valide en variables mixtes

Rappel : soit $Y = \{(x, y) \in R_+ \times Z : y \leq b + x\}$ avec R_+ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, Z l'ensemble des nombres entiers relatifs et *b* un réel quelconque. On note *f* la partie fractionnaire de *b* : $b = \lfloor b \rfloor + f$ avec $0 \leq f < 1$

L'inégalité $y \leq \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1-f}$ est valide pour *Y*. Elle est appelée inégalité de base.

Soit $X = \{(x, y) \in R_+ \times Z : y + x \leq b, x \leq c\}$
avec *c* un entier positif et *b* réel quelconque.

1) Montrer que l'inégalité suivante $y \leq \lfloor b \rfloor$ est valide pour *X*.

2) En utilisant l'inégalité de base, montrer que l'inégalité suivante $y + \frac{1}{1-f}(x - fc) \leq \lfloor b \rfloor$ est valide pour *X*.

3) On considère le cas *b*=2,5 et *c*=2. Dans le plan orthonormé avec *x* en abscisse (horizontale) et *y* en ordonnée (verticale), représenter *X* et les deux inégalités valides précédentes.

Inégalité de couverture et extension.

Soit *N* un ensemble d'objets. Pour *i* appartenant à *N* soient a_i un entier>0 représentant le poids de l'objet *i*. Soit *b* un entier t.q. $a_i \leq b$ pour tout *i* appartenant à *N* . *b* représente la capacité du sac-à-dos.
La contrainte de sac-à-dos modélise le fait que le sac-à-dos ne peut supporter un poids total des objets supérieur à *b*.
Elle s'écrit $\sum_{i \in N} a_i x_i \leq b$ (sac – à – dos) avec $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si l objet} i \text{ est choisi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On note *S* l'ensemble des vecteurs booléens (indexés par les objets de *N*) et satisfaisant la contrainte de sac-à-dos. On note *P*=Conv*S* l'enveloppe convexe de *S*.

Soit *C* inclus dans *N*. On dit que *C* est une couverture si $\sum_{i \in C} a_i > b$.
Si *C* est une couverture alors l'inégalité $\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$ est valide pour *S* (et donc *P*) puisqu'un vecteur t.q. $x_i = 1 \quad \forall i \in C$ n'est pas dans *S*. Cette inégalité est appelée inégalité de couverture.
On dit que *C* est une couverture minimale si *C* est une couverture et *C*-{*i*} ne l'est pas pour tout *i* de *C*.

Sous la condition $a_i \leq b$ la dimension de *P* est pleine c'est-à-dire égale au nombre d'objets de *N*.

1) On considère ici un ensemble *N*={1,2,3,4,5} de 5 objets et l'ensemble *S* des vecteurs booléens satisfaisant la contrainte de sac-à-dos : $\begin{cases} 23x_1 + 17x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 2x_5 \leq 40 & \text{(sac – à – dos)} \\ x_i \in \{0,1\} (i \in N) \end{cases}$

a) Soit *C*={1,2,3}. *C* est-elle une couverture ? Est-elle minimale ?

b) On considère la couverture *C*={1,2,3}. Montrer que l'inégalité de couverture $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ induit une facette de *P* c'est-à-dire que $F = \{x \in R^5 : x_1 + x_2 + x_3 = 2\} \cap P$ est une facette de *P*.

2) On rajoute maintenant un 6^{è} objet à *N* et de poids a_6=27. On note maintenant l'ensemble S' des vecteurs booléens satisfaisant la contrainte de sac-à-dos : $\begin{cases} 23x_1 + 17x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 2x_5 + 27x_6 \leq 40 & \text{(sac – à – dos)} \\ x_i \in \{0,1\} (i \in N) \end{cases}$

On note *P'*=Conv*S'*.

a) Montrer que $x_1 + x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow x_6 = 0 \quad \forall x \in S'$.

b) Calculer α maximum tel que $x_1 + x_2 + x_3 + \alpha x_6 \leq 2$ soit valide pour S' c'est-à-dire vérifiée par tous les vecteurs de S'.

c) Montrer que la nouvelle inégalité obtenue induit une facette de P'.