# Génération de colonnes

Alain Faye

MPRO - ENSIIE

# Principe de la génération de colonnes

Soit le programme linéaire (PL)

Minimiser $z=cx$

Sous contraintes $Ax \geq a$

$x \geq 0$

On résout (PL) par l'algorithme du simplexe. Si beaucoup de variables, on utilise un algorithme de <u>génération de colonnes</u>.

Colonne=variable

On ne met pas toutes les colonnes

On les introduit au fur et à mesure

On résout à chaque itération un PL restreint (il n'a pas toutes les colonnes)

# Algorithme de génération de colonnes

- Initialisation: on met quelques colonnes de (PL) $\Rightarrow$ ($PL_R$)
- Itérations:
  1. Résoudre ($PL_R$)

  2. Calculer les coûts réduits des variables de (PL)

  3. Si toutes les variables de (PL) ont un coût réduit$\geq$0 STOP (PL) est résolu
     Sinon ajouter une variable de coût réduit minimum à ($PL_R$) et aller en 1.

# Coût réduit

- Pour calculer les coûts réduits on utilise les variables duales $\mu \geq 0$ associées aux contraintes
- Coûts réduits = $c - \mu A$
- Dimensions
  - $c$ , $\mu$ vecteurs lignes
  - $c$ avec $n$ colonnes , $\mu$ avec $m$ colonnes
  - A matrice $m \times n$
  - $n$ nombre de variables et $m$ nombre contraintes

# Exemple

(PL) Min $z = 2x_1+3x_2$

s.c. $4x_1 +x_2-x_3 \geq 5$

$3x_1+2x_2 \quad -x_4 \geq 6$

$x_1 +2x_2 \quad -x_5 \geq 3$

$x_i \geq 0$ $i$=1 à 5

On démarre avec $x_1$ , $x_3$ , $x_4$

($PL_R$) Min $z = 2x_1$

s.c. $4x_1 -x_3 \geq 5$

$3x_1 \quad -x_4 \geq 6$

$x_1 \geq 3$

$x_1$ , $x_3$ , $x_4 \geq 0$

La solution est $x_1 = 3$, $x_3 = 7$, $x_4 = 3$ et $z=6$

On obtient les variables duales par les écarts complémentaires

Le vecteur de variables duales est $\mu=(0\ 0\ 2)$

# Exemple (suite)

Les coûts réduits = $c$ - $\mu A$

On calcule les coûts réduits des variables qui ne sont pas dans ($PL_R$) (les autres sont nécessairement $\geq 0$)

$c_2 - \mu A_2 = 3 - 4 \quad = -1$

$c_5 - \mu A_5 = 0 - (-2) = 2$

$x_2$ a un coût réduit <0 on la rajoute à ($PL_R$)

($PL_R$) Min z = $2x_1+3x_2$

s.c. $4x_1 + x_2 - x_3 \geq 5$

$3x_1 + 2x_2 \quad - x_4 \geq 6$

$x_1 + 2x_2 \geq 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

La solution est $x_1 = 3/2$, $x_2 = ¾$, $x_3 = 7/4$, $x_4 = 0$ et z=5+ ¼

On obtient les variables duales par les écarts complémentaires

Le vecteur de variables duales est $\mu$=(0  ¼  5/4)

# Exemple (suite et fin)

Les coûts réduits = $c - \mu A$
On calcule les coûts réduits des variables qui ne sont pas dans ($PL_R$)
$c_5 - \mu A_5 = 0 – (-5/4) = 5/4$

Toutes les variables ont un coût réduit $\geq 0$ donc (PL) est résolu.

# Encadrement de la valeur optimale de (PL)

- Borne Sup.

  A chaque itération de la génération de col.

$$\text{valeur (PL)} \leq \text{valeur } (PL_R)$$

Car il manque des colonnes dans le problème restreint

# Encadrement de la valeur optimale de (PL)

- Borne Inf.

Supposons que la sol. optimale x* de (PL) vérifie $\sum_{j=1}^{n} x_j^* \leq \kappa$

Notons $cred$ le coût réduit minimum à une itération

A chaque itération de la génération de col.

$$\text{valeur } (\text{PL}_\text{R}) + \kappa \times cred \leq \text{valeur } (\text{PL})$$

# Borne inf. démonstration

Soit x* la sol. optimale de (PL) et $\mu$ les var. duales optimales de ($PL_R$) à une itération de l'algo. de génération de col.
On rappelle que $x^* \geq 0$ et $\mu \geq 0$

On note le coût réduit min obtenu par la var. d'indice j*. On a : $0 \geq cred = c_{j^*} - \mu A_{j^*} \leq c_j - \mu A_j \quad \forall j = 1, \ldots, n$

Finalement :

$$cx^* \geq cx^* + \mu(a - Ax^*) = (c - \mu A)x^* + \mu a \geq cred \sum_{j=1}^{n} x_j^* + \mu a \geq cred \times \kappa + \mu a = cred \times \kappa + \text{valeur}(PL_R)$$

La dernière égalité par théorème fort de dualité en programmation linéaire

# Génération de col. - Conditions d'applications

- Problème linéaire avec nombre de variables exponentiel
- Algorithme du simplexe
- On recherche la variable de coût réduit minimum
- Recherche le coût réduit minimum = sous-problème
- Il faut que cette recherche soit facile, rapide

# Applications en Optimisation Combinatoire

- Relaxation

- Optimisation sur une enveloppe convexe de points – Méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe

- Exemples
  - Le problème du voyageur de commerce
  - Problèmes de tournées de livraison
  - Problèmes de découpe (cutting stock problem)

# Exemples

- Le problème du voyageur de commerce
  - Les variables sont les 1-arbres du graphe
  - Sous-problème = trouver un 1-arbre de poids minimum (algorithme polynomial basé sur l'algorithme de Kruskal pour trouver arbre de poids minimum)
- Problèmes de découpe industrielle
  - Les variables sont les patterns que l'on peut découper dans les « rolls » (grand nombre de patterns possibles)
  - Sous-problème = sac-à-dos en nombres entiers
- Tournées de livraisons avec fenêtres de temps, capacité des véhicules
  - Les variables sont des routes desservant les clients respectant contraintes de capacité, de fenêtre de temps,…
  - Sous-problème = plus courts chemins sous contraintes

# Bibliographie


- A primer in Column Generation. Jacques Desrosiers HEC Montréal, Marco Lübbecke RWTH Aachen University, March 2006

FIN