Inégalités valides et facettes

MPRO - ENSIIE

Alain Faye

Contenu

- Inégalités valides
- Polyèdres : dimension, face, facettes
- Algorithme de coupes

Introduction - motivation

On considère le problème en nombres entiers
Min $\{cx : Ax \leq b, x \in Z^n\}$

L'ensemble des solutions admissibles est:
$X=\{x \in Z^n : Ax \leq b\}$

Objectif:

- Obtenir un polyèdre P (sans contraintes d'intégrité) pour décrire ConvX l'enveloppe convexe de X . Si on obtient ConvX=P le problème en nombres entiers se ramène au programme linéaire : Min cx s.c. $x \in P$

- Obtenir des bornes inf. de bonnes qualités. Il faut avoir une bonne approximation de ConvX.

Cas particulier: x vecteur de coordonnées 0 ou 1 .
L'ensemble des vecteurs booléens sera noté $B^n=\{0,1\}^n$

Inégalités valides

Sommaire

Notions préliminaires

Polyèdre

Un polyèdre est l'ensemble des solutions d'un système d'inégalités linéaires de la forme $Ax \leq b$: $P = \{x \in R^n : Ax \leq b\}$

Un polyèdre est convexe car c'est l'intersection des convexes que sont les demi-espaces défini par chaque inégalité

Un point extrême de P est un point de P qui ne peut pas s'exprimer comme combinaison convexe de 2 points distincts de P.

L'optimum d'une forme linéaire sur P (s 'il existe) est atteint en un point extrême de P

Exercice: soit le polyèdre P défini par:

$x_1+x_2 \leq 2$

$2x_1+x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

1. Dessiner le polyèdre
2. Vérifier que les points x=(0,0), x=(0,2), x=(3/2,0) x=(1,1) sont les points extrêmes de P
3. Hachurer $\mathrm{Conv}(P \cap \mathbb{N}^2)$

Inégalités valides

Inégalité valide

Soit $X=\{x \in Z^n : Ax \leq b\}$

<u>Définition</u>: l'inégalité $\pi x \leq \pi_0$ est valide pour X si $\pi x \leq \pi_0 \; \forall x \in X$

<u>Exercice</u>:

Soit $X=\{x \in B^5 : 3x_1-4x_2+2x_3-3x_4+x_5 \leq -2\}$
Par des raisonnements « booléens » montrer que $x_2+x_4 \geq 1$ et $x_1 \leq x_2$ sont valides pour X

Partie fractionnaire d'un nombre

Notation: $\lfloor a \rfloor$=plus grand entier inférieur ou égal à a

Exemples:
$\lfloor 5{,}4 \rfloor = 5$
$\lfloor -5{,}4 \rfloor = -6$

Partie fractionnaire: $f = a - \lfloor a \rfloor$

Exemples:
Partie fractionnaire de 5,4 est 0,4
Partie fractionnaire de –5,4 est $f = -5{,}4-(-6) = 0{,}6$

Coupes de Chvatal

Soit $ax \leq b$ une inégalité avec x entier≥0 (b scalaire)

1. relaxation : $\sum_j \lfloor a_j \rfloor x_j \leq b$ est valide car $x \geq 0$
2. arrondi : $\sum_j \lfloor a_j \rfloor x_j \leq \lfloor b \rfloor$ est valide car x entier

Note: pour obtenir l'inégalité de départ , on peut toujours faire une combinaison linéaire positive des contraintes $Ax \leq b$ décrivant X = $\{x \in \mathrm{Z}^n_+ :\ Ax \leq b\}$

Coupes de Chvatal

Exemple:
Retrouver les 2 précédentes inégalités valides de $X=\{x \in B^5: 3x_1-4x_2+2x_3-3x_4+x_5 \leq -2\}$ en utilisant les coupes de Chvatal à partir de $0 \leq x_j \leq 1$ et $3x_1-4x_2+2x_3-3x_4+x_5 \leq -2$.

Inégalité valide	$(3x_1-4x_2+2x_3-3x_4+x_5 \leq -2) \times \frac{1}{4}$
Relaxation	$0x_1-x_2+0x_3-x_4+0x_5 \leq -\frac{1}{2}$
Coupe Chvatal	$0x_1-x_2+0x_3-x_4+0x_5 \leq -1$
	$x_2+x_4 \geq 1$

Inégalité valide	$(3x_1-4x_2+2x_3-3x_4+x_5 \leq -2) + (x_2 \leq 1) + (x_4 \leq 1) \times 3$
	$(3x_1-3x_2+2x_3-0x_4+x_5 \leq 2) \times 1/3$
Relaxation	$x_1-x_2+0x_3-0x_4+0x_5 \leq 2/3$
Coupe Chvatal	$x_1-x_2+0x_3-0x_4+0x_5 \leq 0$
	$x_1 \leq x_2$

Coupes de Gomory fractionnaire

Algorithme du simplexe et une ligne du tableau simplex
x_i variable de base et N indices des variables hors-base

$x_i + \sum_{j\in N} a_j x_j = b_i$ avec x_i , $x_j \geq 0$ et entier $j \in N$ ligne relative à x_i du tableau simplexe (1)

$x_i + \sum_{j\in N} \lfloor a_j \rfloor x_j \leq \lfloor b_i \rfloor$ coupe de Chvatal sur (1) (2)

$$(1) - (2) \Rightarrow \sum_{j\in N} f_j x_j \geq f_i$$

c'est la coupe de Gomory fractionnaire

Avec : $f_i = b_i - \lfloor b_i \rfloor$, $f_j = a_j - \lfloor a_j \rfloor$ $j \in N$

Est-il possible d'atteindre toutes les inégalités valides ?

$X=P\cap B^n$ et $P\subset R^n_+$ polyèdre borné $P\subset[0,1]^n$

Procédure des coupes de Chvatal-Gomory

1. On pose $P^t=P$, $t=0$
2. Soit une inégalité valide pour P^t : $ax \leq b$
3. On exerce une coupe de Chvatal sur cette inégalité : $\lfloor a \rfloor x \leq \lfloor b \rfloor$
4. On rajoute l'inégalité obtenue à P^t : $P^{t+1}=P^t\cap\{x: \lfloor a \rfloor x \leq \lfloor b \rfloor\}$
5. On pose $t= t+1$ et on retourne à 2.

Théorème: Si $\pi x\leq\pi_0$ est une inégalité valide pour X avec π, π_0 entiers alors elle s'obtient en un nombre fini d'itérations de la procédure de Chvatal .

Ce résultat est soumis au bon choix de l'inégalité valide à chaque itération.
La démonstration du théorème est constructive et elle donne l'inégalité valide à couper.

Le résultat s'étend au cas entier général $X=P \cap Z^n$ et avec P polyèdre non borné.

Démonstration: on part de $\pi x \leq \pi_0$ et on construit des inégalités valides pour P. Ensuite, à partir de ces inégalités valides on applique la procédure de Chvatal et on obtient $\pi x \leq \pi_0$ en un nombre fini d'itérations.

1) On construit $\pi x \leq \pi_0 + t$ valide pour P avec t entier.

Il suffit de calculer $t_0 = \max_{x \in P} \pi x - \pi_0$ et prendre $t = \lceil t_0 \rceil$

Maintenant on suppose $t_0 > 0$ sinon l'inégalité $\pi x \leq \pi_0$ est valide pour P et c'est fini.

2) On construit $\pi x \leq \pi_0 + M\left(\sum_{j \in I_0} x_j + \sum_{j \in I_1} (1 - x_j)\right)$ valide pour P et toute partition I_0, I_1 des variables avec M entier. Comment calculer M qui convient ?

Pour x fixé, $\min_{I_0, I_1} \sum_{j \in I_0} x_j + \sum_{j \in I_1} (1 - x_j) = \sum_{j=1}^{n} \min(x_j, 1 - x_j) =^{\text{déf.}} f(x)$

Il suffit de considérer maintenant l'inégalité $\pi x \leq \pi_0 + Mf(x)$

$$f(x) \geq 0 \ \forall x \in [0,1]^n \text{ et par ailleurs } f(x) = 0 \leftrightarrow x \in \{0,1\}^n$$

P est borné donc P est l'enveloppe convexe de ses points extrêmes E(P)

Il suffit de construire une inégalité valide sur E(P)

- $x \in X \cap E(P)$ $\pi x \leq \pi_0 + Mf(x) = \pi_0 + M \times 0$ ce qui est vrai car $\pi x \leq \pi_0$ valide sur X
- $x \in E(P) \backslash X$ alors $f(x) > 0$ et $\alpha =^{\text{déf}} \min_{x \in E(P) \backslash X} f(x) > 0$ *(car $|E(P)| < \infty$)*

Pour avoir la validité de l'inégalité, il suffit d'avoir $t_0 = \max_{x \in P} \pi x - \pi_0 \leq M\alpha$

Prenons $M = \left\lceil \frac{t_0}{\alpha} \right\rceil \geq 1$ car $t_0 > 0$

3) Maintenant on applique Chvatal.

Posons t=τ+1

$\pi x \leq \pi_0 + \tau + 1 \qquad \times\frac{M-1}{M}$
$\pi x \leq \pi_0 + \tau + M\left(\sum_{j\in I_0} x_j + \sum_{j\in I_1}(1-x_j)\right) \qquad \times\frac{1}{M}$
On obtient après troncature
$\pi x \leq \pi_0 + \tau + \left(\sum_{j\in I_0} x_j + \sum_{j\in I_1}(1-x_j)\right)$

Ensuite on considère une partition quelconque I'_0, I'_1 des variables $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$
$\pi x \leq \pi_0 + \tau + \left(\sum_{j\in I'_0} x_j + \sum_{j\in I'_1}(1-x_j)\right) + x_n \qquad \times\frac{1}{2}$
$\pi x \leq \pi_0 + \tau + \left(\sum_{j\in I'_0} x_j + \sum_{j\in I'_1}(1-x_j)\right) + 1 - x_n \qquad \times\frac{1}{2}$
On obtient après troncature
$\pi x \leq \pi_0 + \tau + \left(\sum_{j\in I'_0} x_j + \sum_{j\in I'_1}(1-x_j)\right)$

On réitère sur les autres variables jusqu'à obtenir $\pi x \leq \pi_0 + \tau$
Donc si τ=0 c'est fini sinon on pose t=τ et on réitère.

Exercice 1

Soit X l’ensemble des vecteurs d’incidence (indexés par les arêtes) des couplages d’un graphe G=(V,E).

1. En considérant les arêtes incidentes à chaque sommet, donner |V| inégalités (une par sommet) valides pour X.

2. A partir de ces inégalités, montrer à l’aide des coupes de Chvatal que

si T est un ensemble de sommets de cardinal 2k+1 alors :

$\sum_{e \in E(T)} x_e \leq k$ est valide pour X

Où E(T) désigne l’ensemble des arêtes de G ayant leur deux extrémités dans T

Exercice 2

Soit X ensemble des vecteurs d'incidence (indexés par les sommets) des stables d'un graphe G=(V,E).

Par raisonnement « booléen »,

1. Montrer que si $(i,j) \in E$ alors $x_i + x_j \leq 1$ est valide pour X.

2. Montrer que si i, j, k sont les sommets d'un triangle alors $x_i + x_j + x_k \leq 1$ est valide pour X

3. Montrer que si C est une clique d'au moins 3 sommets alors $\sum_{i \in \text{sommets de } C} x_i \leq 1$ est valide pour X

4. Soit un cycle C de G. Montrer que si le nombre de sommets du cycle C est impair 2k+1 alors $\sum_{i \in \text{sommets de } C} x_i \leq k$ est valide pour X.

Soient les inégalités $x_i \geq 0 \quad i \in V$ et $x_i + x_j \leq 1 \ (i,j) \in E$ valides pour X.

5. Retrouver en appliquant des coupes de Chvatal à partir de $x_i \geq 0 \quad i \in V$ et $x_i + x_j \leq 1 \ (i,j) \in E$, la validité des inégalités sur le triangle, la clique, le cycle impair.

Inégalités en variables mixtes

Inégalité mixte : inégalité mêlant variables entières et continues

Inégalité de base

Soit X={(x , y)$\in$R$^+\times$Z : $y \leq b + x$} (b scalaire)

$y \leq \lfloor b \rfloor + x \,/\, (1-f)$ est valide pour X

Avec $f = b - \lfloor b \rfloor$ partie fractionnaire de b

<u>Exemple</u>:
Soit $y \leq 2{,}5 + x$ avec $y \in$Z et $x \geq 0$
Calculer l'inégalité valide correspondante.
Faire une représentation graphique de la coupe.

Inégalité de base

Soit X={(x , y)∈R⁺×Z : $y \le b + x$} (b scalaire)

$y \le \lfloor b \rfloor + x / (1-f)$ est valide pour X

Avec $f = b - \lfloor b \rfloor$ partie fractionnaire de b

<u>Preuve</u>:

Cas 1°: $y \le \lfloor b \rfloor \Rightarrow y \le \lfloor b \rfloor + x / (1-f)$ car $x \ge 0$

Cas 2°: $y \ge \lfloor b \rfloor + 1 \Rightarrow \lfloor b \rfloor + 1 \le b + x$ car $y \le b + x$

ce qui entraine $1 - f \le x \Rightarrow 1 \le \frac{x}{1-f}$

$y \le b + x \Rightarrow y \le \lfloor b \rfloor + f + x = \lfloor b \rfloor + f\left(1 + \frac{x}{f}\right) \le \lfloor b \rfloor + f\left(\frac{x}{1-f} + \frac{x}{f}\right) = \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1-f}$

Inégalité de base alternative

Soit X={(x , y)$\in$R$^+\times$Z : $b \leq y + x$},

f partie fractionnaire de b et $\lceil b \rceil$ le plus petit entier $\geq b$

L'inégalité $\lceil b \rceil \leq y + \frac{x}{f}$ est valide pour X.

<u>Preuve</u>:

On a $\lfloor -b \rfloor = -\lceil b \rceil$
La partie fractionnaire de –b est $-b - \lfloor -b \rfloor = -b + \lceil b \rceil$
La partie fractionnaire de b est $b - \lfloor b \rfloor$

La partie fractionnaire de –b + la partie fractionnaire de b = $\lceil b \rceil - \lfloor b \rfloor = 1$
D'où 1 – la partie fractionnaire de –b = la partie fractionnaire de b

$$b \leq y + x \Leftrightarrow -y \leq -b + x$$

On applique l'inégalité de base : $-y \leq \lfloor -b \rfloor + \frac{x}{f}$
Ce qui donne: $\lceil b \rceil \leq y + \frac{x}{f}$

Inégalité MIR (mixed integer rounding)

Notation: $a^+ = \max(0,a)$. Par exemple: $5^+=5$, $(-5)^+=0$

Soit $X=\{(x , y)\in R_+\times Z^n_+ : \Sigma_j a_j y_j \leq b + x\}$ (b scalaire)

Alors

$$\Sigma_j [\lfloor a_j \rfloor + (f_j - f)^+ /(1 - f)]\, y_j \leq \lfloor b \rfloor + x /(1-f) \qquad \text{(MIR)}$$

est valide pour X

Avec $f_j = a_j - \lfloor a_j \rfloor$, $f = b - \lfloor b \rfloor$ parties fractionnaires de a_j , b

<u>Exemple</u>:
Soit $^{10}/_3 y_1 + y_2 + ^{11}/_4 y_3 \leq ^{21}/_2 + x$ avec $y_j \in Z^+$ et $x \geq 0$
Calculer l'inégalité MIR

Soit $X=\{(x, y)\in R_+\times Z^n_+ : \Sigma_j a_j y_j \leq b + x\}$ (b scalaire)

Alors l'inégalité MIR est valide pour X

$$\Sigma_j [\lfloor a_j \rfloor + (f_j - f)^+/(1-f)]\, y_j \leq \lfloor b \rfloor + x/(1-f) \qquad \text{(MIR)}$$

<u>Preuve</u>:
On relaxe la gauche de la contrainte initiale de la façon suivante:

$$\Sigma_{j \text{ t.q. } fj \leq f} \lfloor a_j \rfloor y_j + \Sigma_{j \text{ t.q. } fj > f}\, a_j y_j \leq b + x$$

Maintenant pour j t.q. $f_j > f$ on écrit: $a_j = \lceil a_j \rceil - 1 + f_j$

$$\Sigma_{j \text{ t.q. } fj \leq f} \lfloor a_j \rfloor y_j + \Sigma_{j \text{ t.q. } fj > f} \lceil a_j \rceil y_j \leq b + x + \Sigma_{j \text{ t.q. } fj > f} (1-f_j) y_j$$

A gauche on a un nombre entier et à droite les termes en x , y sont ≥ 0, on applique l'inégalité de base

$$\Sigma_{j \text{ t.q. } fj \leq f} \lfloor a_j \rfloor y_j + \Sigma_{j \text{ t.q. } fj > f} \lceil a_j \rceil y_j \leq \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1-f} + \frac{1}{1-f} \Sigma_{j \text{ t.q. } fj > f} (1-f_j) y_j$$

On regroupe les termes j t.q. $f_j > f$ et on trouve l'inégalité (MIR)

Comparaison avec les coupes de Chvatal

Soit $X=\{y \in Z^n_+ : \Sigma_j a_j y_j \leq b\}$ (b scalaire)

Coupe de Chvatal : $\sum_j \lfloor a_j \rfloor y_j \leq \lfloor b \rfloor$

Inégalité MIR : $\Sigma_j [\lfloor a_j \rfloor + (f_j - f)^+ /(1 - f)] y_j \leq \lfloor b \rfloor$

L'inégalité MIR « domine » la coupe de Chvatal

- les coefficients du membre gauche sont supérieurs ou égaux à ceux de la coupe de Chvatal car $(f_j - f)^+ /(1 - f) \geq 0$ et de plus $y_j \geq 0$

L'inconvénient est que les coefficients sont fractionnaires

<u>Exercice</u>:
Soit ${}^{10}/_{4}\, y_1 - 6{,}5\, y_2 + {}^{8}/_{3}\, y_3 + y_4 \leq {}^{13}/_{3}$ avec $y_j \in Z_+$
Comparer les deux coupes

Coupes de Gomory mixed integer

Algorithme du simplexe et une ligne du tableau simplexe
y_i variable de base entière et N_I indices des variables hors-base entières
N_C indices des variables hors-base continues

$y_i + \sum_{j\in NI} a_j y_j + \sum_{j\in NC} a_j x_j = b_i$ avec y_i , $y_j \geq 0$ et entier $j \in N_I$, $x_j \geq 0$ $j \in N_C$ ligne y_i du tableau (1)

on enlève les termes ≥ 0 en x à gauche, on obtient:
$y_i + \sum_{j\in NI} a_j y_j + \sum_{j\in NC\,:\,aj<0} a_j x_j \leq b_i$ avec y_i , $y_j \geq 0$ et entier $j \in N_I$, $x_j \geq 0$ $j \in N_C$ (1')

$y_i + \sum_{j\in NI} [\lfloor a_j \rfloor + (f_j - f_i)^+/(1-f_i)]\, y_j + \sum_{j\in NC:\, aj<0} [a_j/(1-f_i)] x_j \leq \lfloor b_i \rfloor$ MIR sur (1') (2)

$(1) - (2) \Rightarrow$
$\sum_{j\in NI:\, fj\leq fi} f_j y_j + \sum_{j\in NI:\, fj>fi} [f_i(1-f_j)/(1-f_i)] y_j + \sum_{j\in NC:\, aj\geq 0} a_j x_j - \sum_{j\in NC:\, aj<0} [a_j f_i/(1-f_i)] x_j \geq f_i$

C'est la coupe de Gomory mixed integer

Avec : $f_i = b_i - \lfloor b_i \rfloor$, $f_j = a_j - \lfloor a_j \rfloor$ $j \in N_I$

Coupes de Gomory mixed integer

<u>Exemple</u>: $y_1 - 0{,}2y_3 + 0{,}1y_4 = 1{,}3$
Avec y_1, y_3, y_4 entières ≥0 et y_1 en base , y_3, y_4 hors-base

- Coupe Gomory mixed integer

$$\frac{0{,}3(1-0{,}8)}{1-0{,}3}y_3 + 0{,}1y_4 \geq 0{,}3 \xrightarrow{\times 70} 6y_3 + 7y_4 \geq 21$$

- Coupe Gomory fractionnaire

$$0{,}8y_3 + 0{,}1y_4 \geq 0{,}3 \xrightarrow{\times 70} 56y_3 + 7y_4 \geq 21$$

Contrainte disjonctive

Contrainte valide sur l'union de deux parties de R^n_+

Soit $a^1x \leq b^1$ valide pour $S1 \subseteq R^n_+$

Soit $a^2x \leq b^2$ valide pour $S2 \subseteq R^n_+$

Alors on a: $\min(a^1x , a^2x) \leq \max(b^1 , b^2) \;\; \forall x \in S1 \cup S2$

Et $\Sigma_j \min(a^1_j x_j , a^2_j x_j) \leq \min(a^1x , a^2x)$

Et $\min(a^1_j , a^2_j)x_j = {}_j\min(a^1_j x_j , a^2_j x_j)$ car $x_j \geq 0 \;\; \forall j=1$ à n

<u>Finalement</u>: $\sum_j \min(a^1_j , a^2_j)x_j \leq \max(b^1 , b^2)$ est valide pour $S1 \cup S2$

Disjonction de polyèdres

Soit $P=P_1 \cup P_2$ et $x \in R^n_+$
Avec $P_1=\{x \in R^n_+ : A^1 x \leq b^1\} \neq \emptyset$ et $P_2=\{x \in R^n_+ : A^2 x \leq b^2\} \neq \emptyset$

Soit $u^1 \geq 0$, $u^2 \geq 0$ et π, π_0 t.q.
$\pi \leq u^1 A^1$, $u^1 b^1 \leq \pi_0$ (1)
$\pi \leq u^2 A^2$, $u^2 b^2 \leq \pi_0$ (2)

Alors $\pi x \leq \pi_0$ est valide pour P.

On a la réciproque.

Proposition
Si $\pi x \leq \pi_0$ est valide pour P, alors il existe $u^1 \geq 0$, $u^2 \geq 0$ t.q. (1) et (2)

preuve: $\pi x \leq \pi_0$ est valide pour P se modélise par 2 PL:

Max πx s.c. $x \in P_i$ $i = 1, 2$ et ce max $\leq \pi_0$

Les duaux de ces PL donnent des solutions u^*_i $i = 1, 2$ vérifiant (1) et (2).

Contrainte disjonctive

Disjonction sur une contrainte mixte:

(A) $x_0 = a_0 - \sum_{j=1,n} a_j x_j$ avec x_0 entier et $x_j \geq 0$ j=1 à n

2 cas:

- $x_0 \leq \lfloor a_0 \rfloor$

On élimine x_0 dans (A) et on obtient $\sum_j a_j/(a_0 - \lfloor a_0 \rfloor)\, x_j \geq 1$

- $x_0 \geq \lfloor a_0 \rfloor + 1$

On élimine x_0 dans (A) et on obtient $\sum_j a_j/(a_0 - \lfloor a_0 \rfloor - 1)\, x_j \geq 1$

- On applique le résultat précédent (on peut car $x_j \geq 0$) on obtient l'inégalité valide : $\sum_j b_j x_j \geq 1$

Avec $b_j = \max\{\, a_j/(a_0 - \lfloor a_0 \rfloor)\, ,\, a_j/(a_0 - \lfloor a_0 \rfloor - 1)\, \}$

<u>Exercices</u>:

- $x_0 = 15/4 - 1/2\, x_1 + 7/4\, x_2 - 11/4\, x_3$ avec x_0 entier et $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Calculer l' inégalité valide correspondante

- Démontrer l'inégalité de base à partir de la contrainte disjonctive

Exercice 1

Soit $X = \{(x, y) \in R_+ \times Z : x \leq 10y, x \leq 14\}$.

1) Montrer que l'inégalité suivante $-y \leq \frac{14-x}{10} - \frac{14}{10}$ est valide pour *X*.

2) Appliquer l'inégalité de base à l'inégalité précédente (question 1). Peut-on le faire ?

3) Représenter *X* dans un repère orthonormé avec *x* en abscisse (horizontale) allant de 0 à 20 et *y* en ordonnée (verticale) allant de 0 à 3. Tracer ensuite l'inégalité trouvée en 2) et hachurer la partie tronquée.

<u>Exercice 2</u>: extension de l'inégalité de base

Soit $X=\{(x^+,x,y)\in R^+\times R^+\times Z : y+x\leq b+x^+,\ x\leq c\}$ avec c entier≥ 0

1.Montrer en utilisant l'inégalité de base que:

$$y+(x-cf)/(1-f)\leq\lfloor b\rfloor+x^+/(1-f) \text{ est valide pour } X$$

Avec $f=b-\lfloor b\rfloor$ partie fractionnaire de b

Noter que x-cf n'est pas forcément négatif

2.Soit $y+x\leq 2{,}5$ avec $y\in Z$ et $0\leq x\leq 3$

Calculer l'inégalité valide correspondante.
Faire une représentation graphique de la coupe.

Bibliographie :

Nemhauser G.L., Wolsey L.A. (1988) Integer and Combinatorial Optimization. John Wiley & Sons, New York

Wolsey, L. A. (1998) Integer Programming, John Wiley & Sons, New York

Polyèdres et facettes

Introduction - motivation

Problème en variables entières:
Min cx s.c. $x \in$ X où X=$\{x$: $Ax \leq b\} \cap Z^n$

Objectif:
• obtenir description de ConvX par un polyèdre P et résoudre le progr. linéaire:
(P_{Lin}) Min cx s.c. $x \in$P

• Ou au moins obtenir une bonne approximation P t.q. ConvX$\subset$P

On a vu comment trouver des inégalités valides pour X

Les inégalités valides disponibles pour X et donc ConvX

• Sont-elles toutes indispensables? Quelles sont celles vraiment utiles ?

• Généralement nombreuses, on ne peut pas toutes les mettre dans (P_{Lin}) .
D'où nécessité d'un algorithme de coupes

Sommaire

Indépendance affine

Ensemble convexe
- Convexe, enveloppe convexe
- Dimension d'un convexe
- Face d'un convexe

Polyèdre
- Dimension
- Facettes

Algorithme de coupes
- Problème de séparation
- Branch & Cut

Indépendance affine

Déf: Des points $x^1, \ldots, x^p$ de R^n sont affinement indépendants lorsque

$\lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_p x^p = 0$ avec $\lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$

ou encore $x^2 - x^1, \ldots, x^p - x^1$, sont linéairement indépendants

<u>Exemples</u>:

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ sont affinement indépendants car

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ne sont pas affinement indépendants car

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ sont liés

Ensemble convexe

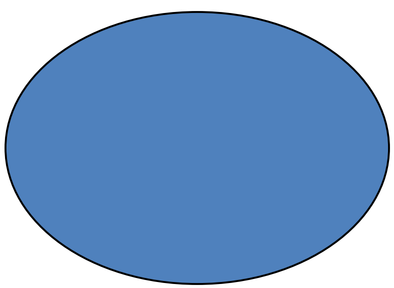
Ensemble convexe

$C \subset R^n$, est convexe si: $x,y \in C$ et $0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow (1-\lambda)x+\lambda y \in C$

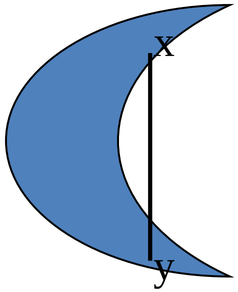
le segment [x,y] est l'ensemble des points z de la forme :

$z=(1-\lambda)x+ \lambda y$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$

z est combinaison convexe de x et y



convexe



pas convexe

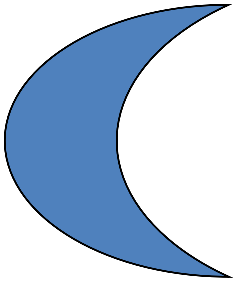
une partie du segment [x,y]
n 'est pas dans C

Enveloppe Convexe

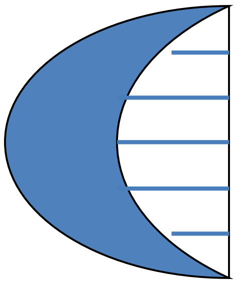
Déf: étant donné $M \subset R^n$, ConvM , l'enveloppe convexe de M, est

le plus petit convexe contenant M c'est-à-dire

l'intersection de tous les convexes contenant M.



M



ConvM = M+partie hachurée

Combinaison convexe

Une combinaison convexe de points $x_1, \ldots, x_p$ de R^n est un point z de la forme :

$z = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p$ avec $\lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1$ et $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_p \geq 0$

Par rapport à une combinaison affine, noter la condition de non-négativité sur les coefficients

ConvM est l'ensemble des combinaisons convexes de points de M.

$z \in \mathrm{ConvM} \Leftrightarrow z = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p$ avec
$x_1, \ldots, x_p \in M$ et $\lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1$ et $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_p \geq 0$ et p entier quelconque

Dimension

Soit C un convexe de R^n

Déf: Soit p le nombre maximum de points affinement indépendants contenus dans C,
la dimension de C est égale à p - 1.

Notation : dim(C)

La dimension de C est la dimension de AffC le plus petit espace affine contenant C

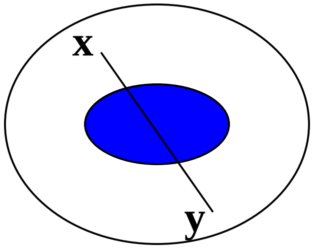
Face d'un convexe

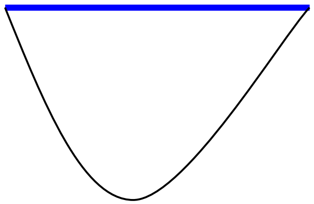
pour $x,y \in R^n$ le segment $[x,y]$ est l'ensemble des points z de la forme
$z = (1-\lambda)x + \lambda y$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$.
Le segment ouvert $]x,y[$ est obtenu en restreignant λ à $0<\lambda<1$
(les extrémités x, y sont exclues).

Déf: soit C un convexe fermé de R^n .
$F \subset C$ est une face de C
- si F est convexe
- si pour tout $x \neq y$ de C t.q. le segment ouvert $]x,y[$ rencontre F alors $x, y \in F$

C lui-même est une face de C

La partie bleue n 'est pas une face



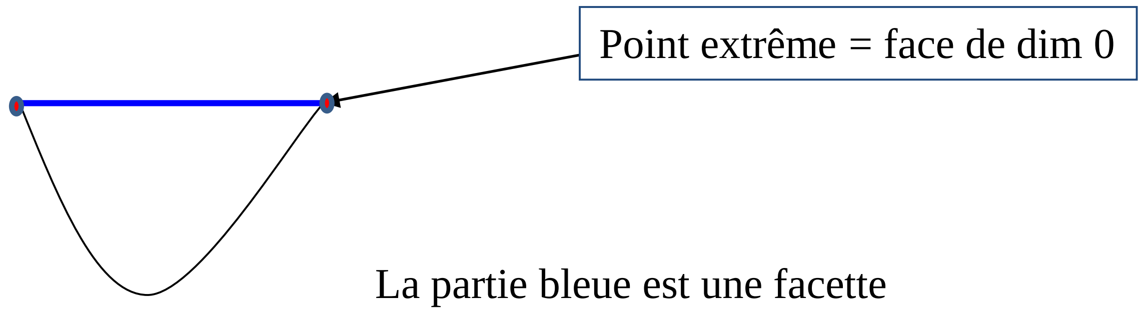


La partie bleue est une face

Points extrêmes, facettes

Un <u>point extrême</u> est une face de dimension 0

Une <u>facette</u> de C est une face de C de dimension dim(C) - 1.



soient G, F faces d'un convexe C t.q. G est strictement contenue dans F alors dimG<dimF.

une facette est une face propre (i.e. $\neq$ C) maximale (pour l'inclusion)

Faces et faces exposées

Les faces exposés d'un convexe C sont les parties de C de la forme suivante.

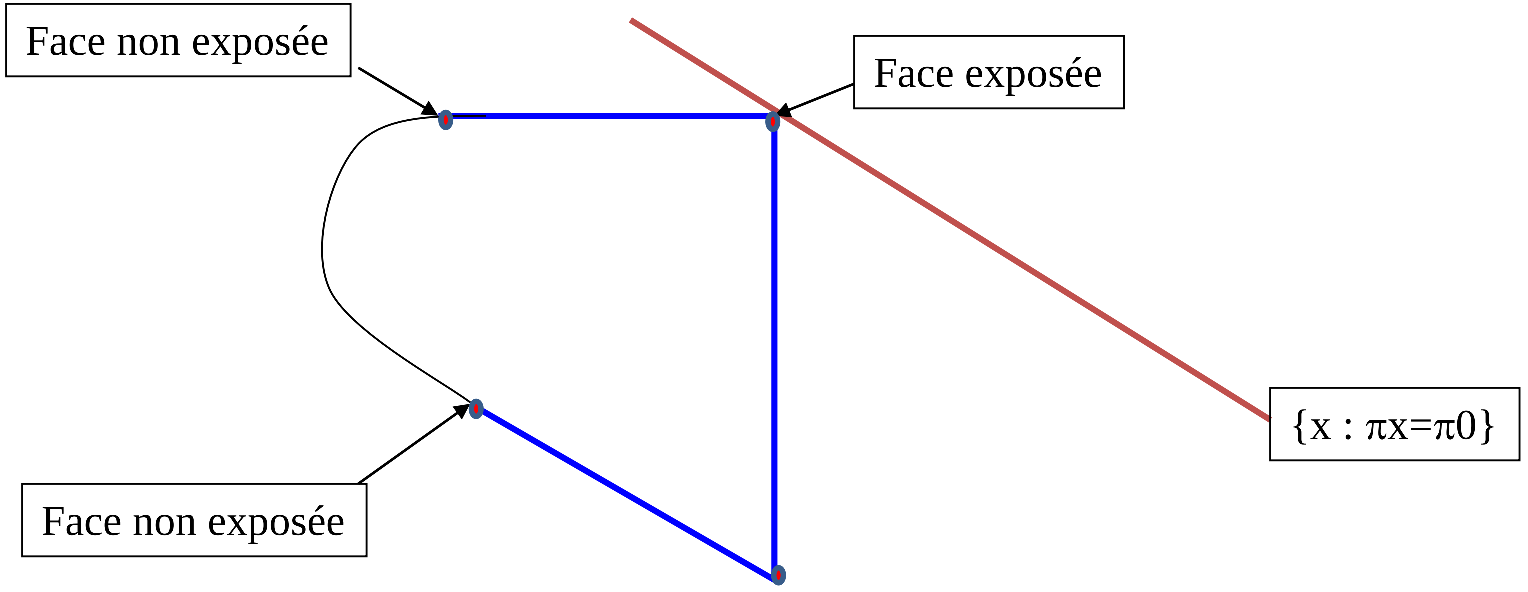
Soit $\pi x \leq \pi_0$ une inégalité valide pour C (i.e. $C \subset \{x: \pi x \leq \pi_0\}$),

Définition:
$F = C \cap \{x: \pi x = \pi_0\}$ est une face exposée de C.

Remarquer le $\leq$ qui s'est transformé en =

Exercice: montrer qu'une face exposée est une face

Toutes les faces ne sont pas forcément exposées.



Polyèdres

Polyèdre

Un polyèdre est l'ensemble des solutions d'un système fini d'inégalités linéaires

P = $\{x \in \mathrm{R}^n : a^i x \leq b_i \;\; i \in I\}$ (I fini)

Un polyèdre est un convexe fermé.

<u>Exemple</u>

soit le polyèdre P de R^2 défini par:

$x_1 + x_2 \leq 2$ (1)

$2x_1 + x_2 \leq 3$ (2)

$x_1 \geq 0$ (3)

$x_2 \geq 0$ (4)

4 inégalités

$a^1=(1 \;\; 1)$, $b_1=2$

$a^2=(2 \;\; 1)$, $b_2=3$

$a^3=(-1 \;\; 0)$, $b_3=0$

$a^4=(0 \;\; -1)$, $b_4=0$

Face d'un polyèdre

On peut démontrer que pour décrire les faces de P on peut ne considérer que les inégalités valides de la description initiale $a^i x \leq b_i$

Plus précisément F est une face de P ssi $\exists J \subseteq I$ tel que $F = P \cap \{x: a^j x = b_j \; j \in J\}$

Le nombre de faces d'un polyèdre est fini et borné par $2^{|I|}$ le nombre de façons de choisir J dans I.

Note: l'ensemble vide est une face (de dimension -1 par convention)

Exercice: montrer que toutes les faces de P sont des faces exposées
Indication: soit $F = P \cap \{x: a^j x = b_j \; j \in J\}$ face de P, construire $\pi x \leq \pi_0$ en additionnant les inégalités de J et monter que $F = P \cap \{x: \pi x = \pi_0\}$

<u>Exemple</u>

soit le polyèdre P de R^2 défini par:

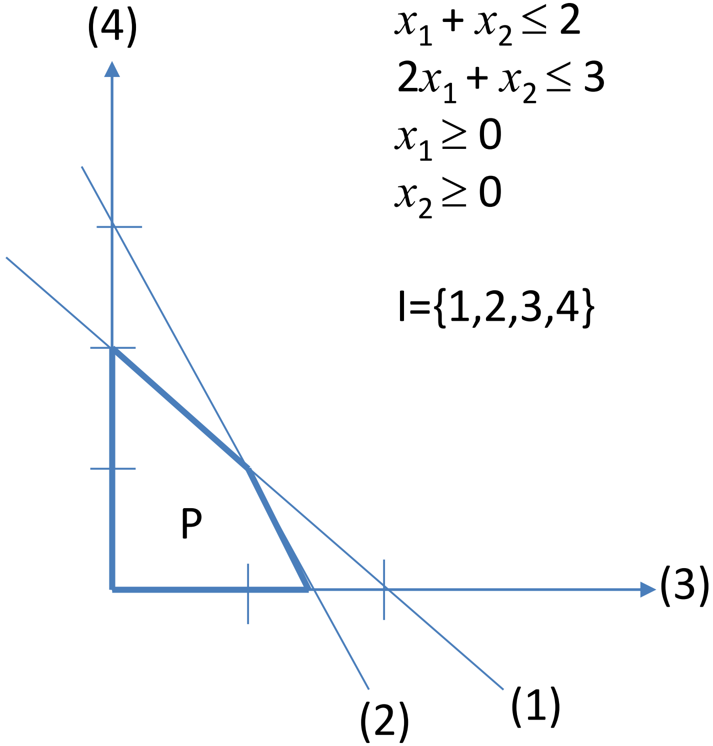
$x_1 + x_2 \leq 2$ (1)

$2x_1 + x_2 \leq 3$ (2)

$x_1 \geq 0$ (3)

$x_2 \geq 0$ (4)

I={1,2,3,4}



__Exemple__

soit le polyèdre P de R^2 défini par:

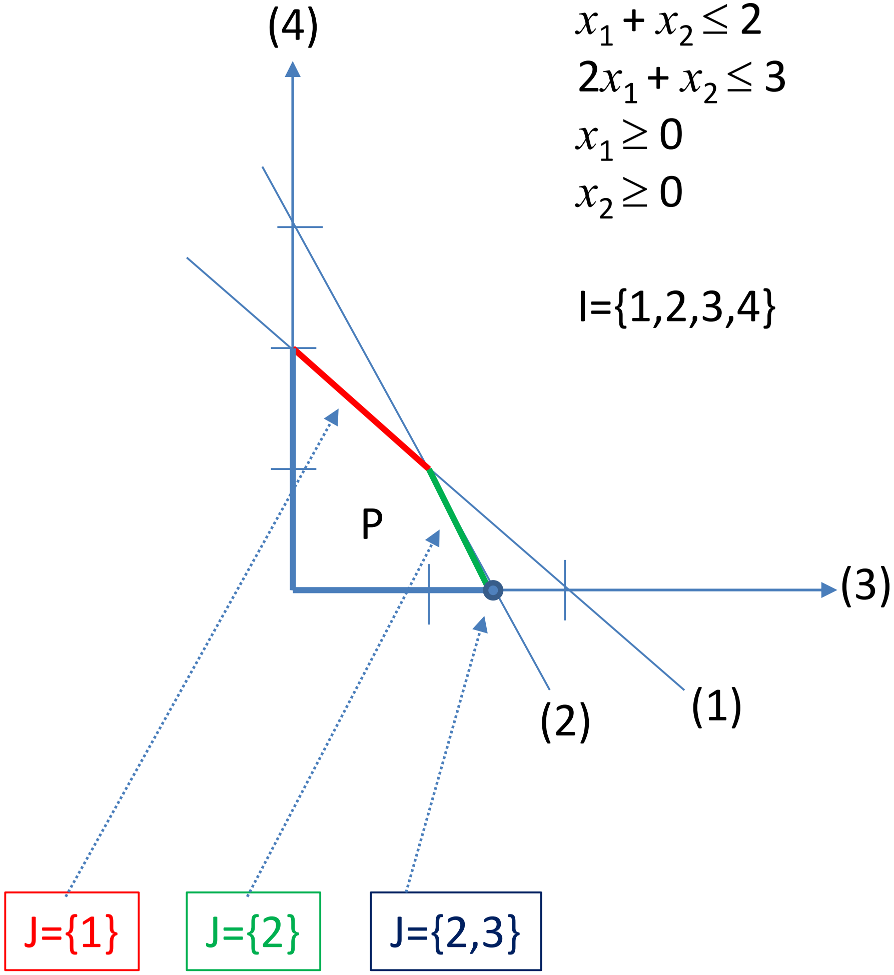
$x_1 + x_2 \leq 2$ (1)

$2x_1 + x_2 \leq 3$ (2)

$x_1 \geq 0$ (3)

$x_2 \geq 0$ (4)

I={1,2,3,4}



Exemple de faces

Points extrêmes

Notation : Rang d'un ensemble de vecteurs $\{a^1, \ldots, a^p\}$ est le
rang de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $a^1, \ldots, a^p$ transposés

Les points extrêmes étant des faces de dimension 0,
pour les obtenir il suffit de suivre la méthode suivante:

• Parmi les systèmes obtenus en parcourant les ensembles $J \subset I$:
$a^i x = b_i \quad i \in J \subset I$

Choisir ceux ayant une unique solution i.e. $n = \text{rang}\{a^i : i \in J\}$

• Les points extrêmes sont les solutions $x \in P$

Exemple:

trouver les points extrêmes du polyèdre P de R^3 défini par

(1) $x_1 + x_2 \geq 1$

(2) $x_1 + 2x_3 \geq 2$

(3) $-x_2 + x_3 \geq -4$

(4) $-x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 11$

Par exemple « serrons » (1) et (2) et (3):

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_3 = 2$$
$$-x_2 + x_3 = -4$$

Solution unique : $x_1 = -8$, $x_2 = 9$, $x_3 = 5$, de plus ce point est dans P (il satisfait (4)) donc c'est un point extrême de P.

Dans ce qui suit, on s ’intéressera à:

- Dimension d ’un polyèdre

- Représentation minimale d ’un polyèdre
  c ’est à-dire avec un minimum d ’égalités et d ’inégalités (facettes)

On partitionne I en $I^{=}$ et $I^{\leq}$ de la façon suivante:

- $i \in I^{\leq}$: il existe un point de P qui satisfait l'inégalité i strictement
$\exists x \in P \;\; a^i x < b_i$

- $i \in I^{=}$: l 'inégalité i satisfaite avec égalité par tous les points de P
$\forall x \in P \;\; a^i x = b_i$

Donc P peut se décrire par le système suivant:

$$\boxed{\begin{array}{ll} a^i x = b_i & i \in I^{=} \\ a^i x \leq b_i & i \in I^{\leq} \end{array}}$$

Avec $I = I^{=} \cup I^{\leq}$ et $I^{=} \cap I^{\leq} = \emptyset$
éventuellement $I^{\leq} = \emptyset$ ou $I^{=} = \emptyset$

Dimension d'un polyèdre

La dimension de P peut s'obtenir de deux façons différentes:

- Façon 1 (définition):

Chercher p le nombre maximum de points affinement indépendants dans P
et poser dim(P)=p-1

- Façon 2:

Déterminer le « rang » du système $a^i x = b_i$ $i \in I^=$

dim(P) = n – rang$\{a^i : i \in I^= \}$

En pratique on est obligé de combiner les 2 façons (voir ex. suivants)

Dimension d'un polyèdre

<u>Exercice 1</u>: soit $P \subset R^2$

(1) $x_1 + x_2 \leq 1$

(2) $x_1 - x_2 \leq 1$

(3) $-x_1 - x_2 \leq -1$

(4) $x_1 \geq 0$

(5) $x_2 \geq 0$

Donner $I^{=}$ et $I^{\leq}$. En déduire dim(P).

Dimension d'un polyèdre

Exercice 2: soit $P \subset R^3$

(1) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$

(2) $-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq -2$

(3) $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$

(4) $x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -2$

(5) $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$

Donner $I^{=}$ et $I^{\leq}$. En déduire dim(P).

(1) et (2) $\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1$

On reporte $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ dans (3) et (4) et on obtient $x_1 + x_2 = 0$

On en déduit que $I^{=}$ contient au moins (1), (2), (3), (4)

Le rang des formes a^1, a^2, a^3, a^4 associées à ces contraintes vaut 2

Donc dim(P) $\leq$ 3-2=1

Par ailleurs, P contient les points $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui sont affinement indépendants.

Donc dim(P)$\geq$1.

Finalement dim(P)=1.

Facette d'un polyèdre

Une facette F de P est une face de P de dimension égale à la dimension de P moins 1

Inégalité redondante:
on peut la retirer du système décrivant P sans rien changer

Inégalité non redondante:
si on la retire du système décrivant P on obtient un polyèdre$\neq$P

Les inégalités non redondantes correspondent aux facettes de P:

si i$\in$ $I^{\leq}$ est l'indice d'une inégalité non redondante de P alors

F = P$\cap\{x\text{: } a^{i} x = b_{i}\ \}$ est une facette de P i.e. dim(F) = dim(P)–1

Donc toute inégalité qui n 'induit pas une facette de P
peut être retirée de la description de P car redondante

Comment prouver qu'une face est une facette?

soit $j \in I^{\leq}$ et $F = P \cap \{x : a^{j} x = b_{j}\}$

Pour montrer que F face de P est une facette, on peut faire de deux façons:

• Façon 1 (définition)
Chercher p le nombre maximum de points affinement indépendants dans F
p-1 est la dimension de F donc si p-1=dim(P)-1 c'est-à-dire p=dim(P)
Alors F est une facette

• Façon 2:
Utiliser le résultat suivant

F est une facette de P ssi pour tout (g,β) t.q. $F \subset \{x : gx = \beta\}$
il existe réels μ, λ_i $i \in I^{=}$ t.q. $(g,\beta) = \mu\,(a^{j}, b_{j}) + \sum_{i \in I^{=}} \lambda_i\,(a^{i}, b_{i})$

Dans cette approche les points x de F sont les données et g, β les inconnues du système $gx = \beta$. F est une facette ssi les solutions de ce système sont de la forme $(g,\beta) = \mu\,(a^{j}, b_{j}) + \sum_{i \in I^{=}} \lambda_i\,(a^{i}, b_{i})$

Exercice: soit le polyèdre P défini par:

(1) $x_3 - x_1 \leq 0$
(2) $x_3 - x_2 \leq 0$
(3) $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
(4) $x_1 \leq 1$
(5) $x_2 \leq 1$

1. Montrer que P est de dimension pleine.

2. Soit la face de P induite par (3) c 'est-à-dire $F = P \cap \{x: x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$
- Montrer que F est une facette de P par la façon 2.
- Montrer que F est une facette de P par la façon 1.
3. On considère les faces induites par les inégalités (4) et (5).
- Montrer que pour chacune leur dimension ne peut excéder 1

Correction

1° Considérer les 4 points de P affinement indépendants suivants

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que dim(P)=3

2° a) Soit $H = \{x: g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3 = \beta\}$ contenant F

$p_1 \in F$ et donc $p_1 \in H$ ce qui entraine $g_1 = \beta$

De même $p_2 \in F$ et $p_3 \in F$ ce qui entraine $g_2 = \beta$ et $g_1 + g_2 + g_3 = \beta$

D'où $g_3 = -\beta$. En prenant $\mu = \beta$, on constate que l'équation de H s'écrit

$$\mu(x_1 + x_2 - x_3) = \mu$$

C'est-à-dire μ fois l'équation définissant F

b) $p_1, p_2, p_3 \in F$ sont affinement indépendants donc dimF≥2 comme F est contenu dans l'hyperplan $\{x: x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$ sa dimension ne peut excéder 2. Donc dim(F)=dim(P)-1

3° On remarque que (4)=(2)+(3)

D'où $x \in P$ et $x_1 = 1$ entraîne $x_3 - x_2 = 0$ et $x_1 + x_2 - x_3 = 1$ car si l'une des 2 n'est pas saturée, on ne peut avoir $x_1 = 1$.

Donc la face induite par (4) est incluse dans 2 hyperplans distincts et sa dimension ne peut pas excéder 1. C'est donc un point extrême de P.

De même pour l'inégalité (5).

Enveloppe convexe

Soit le polytope Q=Conv*M* avec $M=\{x^1,\ldots,x^p\}$ un ensemble fini de points de R^n .

Conv*M* est le plus petit convexe contenant *M* . C'est aussi l'ensemble des combinaisons convexes de points de M

Théorème de Weyl : Q est un polyèdre de R^n **.**

Exercice

soit $$M=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

un ensemble de 4 points de R^3 .

- Ecrire un point (x, y, z) de Conv*M* comme combinaison convexe des 4 points avec λ_i i=1,…,4 les coefficients de la combinaison.
- Eliminer les variables λ du système.
- Donner la description de Conv*M* comme polyèdre de R^3 en les variables x, y, z.

Algorithme de coupes

On considère le problème en variables discrètes suivant:

$$\text{(Pb)} \quad \text{minimiser } cx \quad \text{s.c. } x \in \mathrm{X}$$

où X ensemble fini de points de Z^n

|X| fini mais grand $\Rightarrow$ énumération impossible.

On se ramène au problème continu:

$$(\mathrm{P}_{\mathrm{Lin}}) \quad \text{minimiser } cx \quad \text{s.c. } x \in \mathrm{ConvX}$$

Par le théorème de Weyl, ConvX est un polyèdre
donc ($\mathrm{P}_{\mathrm{Lin}}$) est un programme linéaire

Démarche de la méthode polyédrique

ConvX est un polyèdre mais reste à trouver les égalités et inégalités le décrivant

Première étape :
trouver la dimension de ConvX et l'ensemble $I^{=}$ des égalités contenant X
(l'intersection de ces égalités décrit AffX l'enveloppe affine de X)

Deuxième étape : trouver des inégalités valides et encore mieux des facettes

Généralement on ne trouve qu'une partie des inégalités $I^{\leq}$ de ConvX

Troisième étape :
insertion des égalités et inégalités connues dans le programme
mathématique de façon dynamique (au fil de l'eau) par un algorithme de coupes

Qu'est-ce qu'un algorithme de coupes?

Supposons Q=ConvX décrite par
les ensembles $I^{=}$ et $I^{\leq}$ d 'égalités et d 'inégalités

- Les égalités servent à décrire l'enveloppe affine de Q, AffQ $\subset R^n$

et donc
$| I^{=} | \leq n$ s 'il n 'y a pas d 'égalités redondantes

- Le nombre d'inégalités $| I^{\leq} |$ peut être très grand (devant n).

Dans ce cas on ne peut résoudre (P_{Lin}) avec toutes les inégalités
On ne met que les inégalités utiles à l'obtention de la solution optimale

Algorithme de coupes

0. choisir un polyèdre initial P^0 contenant ConvX
   construit avec les égalités $I^=$ et quelques inégalités de $I^\leq$
   poser k=0

1. soit x^* solution du problème minimiser cx s.c. $x \in P^k$

2. Recherche d'inégalités de $I^\leq$ violées par x^*
   S'il n'existe pas d'inégalités violées STOP
   Sinon $P^{k+1} = P^k$ + quelques inégalités de $I^\leq$ violées

3. k=k+1; aller en 1.

Recherche inégalités violées

La partie 2 consiste à rechercher des inégalités de $I^\leq$ violées
c 'est-à-dire non satisfaites par x^*
Généralement on ajoute à P^k les inégalités les plus violées.

C 'est le problème de séparation.

Si on ne connait pas toutes les inégalités décrivant ConvX, il se peut que l'algorithme de coupes se termine sur un point fractionnaire $\notin$ConvX
Dans ce cas on enchaîne sur du B&B

Algorithme à 2 phases

1. Génération de coupes . On obtient un polyèdre P.
2. Si on a obtenu une solution entière alors STOP
   Sinon faire du Branch&Bound à partir de P pour trouver une solution entière

Algorithme Branch&Cut

C'est un B&B mais à chaque nœud de l'arborescence de recherche
on génère des coupes
Ceci dans le but d'améliorer la valeur de la relaxation continue et
d'élaguer plus l'arborescence de recherche.

Exemple: sac-à-dos en 0-1

$$\max 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7$$
$$\text{s.c. } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 \leq 11$$
$$x \in B^7$$

Algorithme à 2 phases

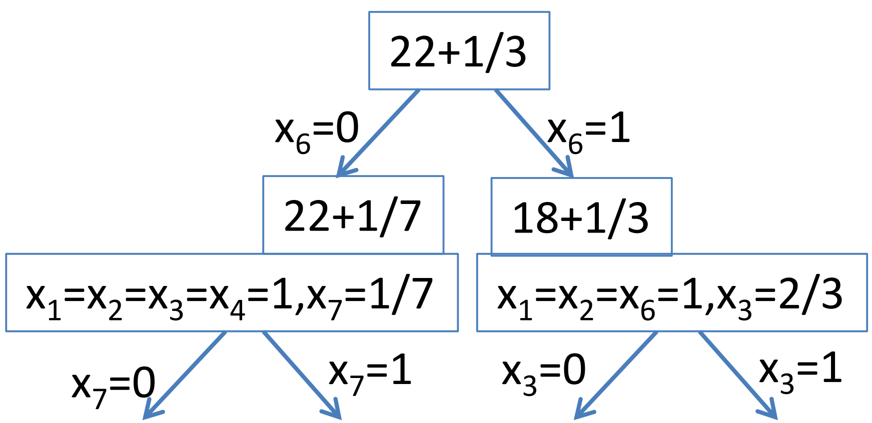
Relaxation continue=22.6 $x_1=x_2=x_3=x_4=1, x_5=0.2$

On trouve une inégalité de couverture $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \leq 4$

On la rajoute au modèle

Relaxation continue=22+1/3 pour $x_1=x_2=x_3=x_4=1, x_6=1/6$

On démarre le B&B



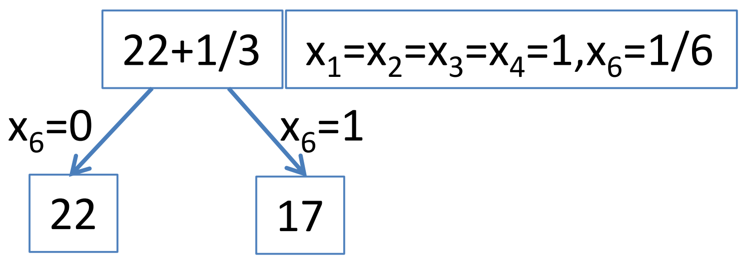
Exemple (suite)

$$\max 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7$$
$$\text{s.c. } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 \leq 11$$
$$x \in B^7$$

Algorithme Branch&Cut

- Le sous-pb $x_6=0$, on trouve une inégalité de couverture $x_1+x_2+x_3+x_7 \leq 3$
  Relaxation continue=22 pour $x_1=x_2=x_3=x_4=1 \Rightarrow$ solution entière

- Le sous-pb $x_6=1$, on trouve une inégalité de couverture $x_1+x_2+x_3 \leq 2$
  Relaxation continue=17 pour $x_1=x_2=x_6=1$, $x_4=1/2$



solution

on coupe car 17<22

Bibliographie :

Arne Brondsted.
An Introduction to Convex Polytopes.
Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag (1983)

Jacques Bair, René Fourneau.
Etude Géométrique des Espaces Vectoriels II, Polyèdres et Polytopes Convexes.
Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag (1980)

Jacques Bair, René Fourneau.
Etude Géométrique des Espaces Vectoriels, Une Introduction.
Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag (1975)

Nemhauser G.L., Wolsey L.A. *Integer and Combinatorial Optimization.*
John Wiley & Sons, New York (1988)

Wolsey, L. A. *Integer Programming*, John Wiley & Sons, New York (1998)