MPRO-ENSIIE. TD Inégalités valides, Polyèdres, Facettes

Disjonction de polyèdres

Soit le problème en nombre entiers

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

Sous contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2} \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On note $P = \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

La maximisation de z sur P donne $x^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

On va partitionner P sur la variable x_1 : soient $P_1 = \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2} \\ x_1 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ et $P_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2} \\ -x_1 \leq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Et l'on cherche une inégalité valide $\pi x \leq \pi_0$ pour $P_1 \cup P_2$ et violée par x^*.

1° Modéliser ce problème.

Pour trouver une inégalité valide pour P_1 , il suffit de combiner positivement les contraintes de P_1 :

$$(u_1 - 2u_2 + u_3)x_1 + (u_1 + u_2)x_2 \leq 2u_1 + \frac{1}{2}u_2$$

Et de même pour P_2.

$$(v_1 - 2v_2 - v_3)x_1 + (v_1 + v_2)x_2 \leq 2v_1 + \frac{1}{2}v_2 - v_3$$

Pour être valide sur $P_1 \cup P_2$, (π, π_0) doit satisfaire :

$$(1) \begin{cases} \pi_1 \leq u_1 - 2u_2 + u_3 \\ \pi_1 \leq v_1 - 2v_2 - v_3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \pi_2 \leq u_1 + u_2 \\ \pi_2 \leq v_1 + v_2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2u_1 + \frac{1}{2}u_2 \leq \pi_0 \\ 2v_1 + \frac{1}{2}v_2 - v_3 \leq \pi_0 \end{cases}$$

On veut trouver l'inégalité la plus violée par $x^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$:

$$\max_{\pi,\pi_0,u,v} z = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{2}\pi_1 - \pi_0$$

Sous les contraintes : (1), (2), (3) et $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \geq 0$

Comme toute inégalité peut être multipliée par un scalaire positif sans la modifier, s'il existe une solution telle que z>0 alors l'optimum sera non borné. Pour éviter cela, il suffit de borner π_0.

On borne π_0 par $\frac{1}{2}$, on résout le problème et l'on trouve :

$$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = \frac{3}{2}, v_1 = 1, v_2 = 0, v_3 = \frac{3}{2}, \pi_1 = -\frac{1}{2}, \pi_2 = 1, \pi_0 = \frac{1}{2}$$

2° Donner l'inégalité, vérifier qu'elle est bien violée par $x^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, faire une représentation graphique.

L'inégalité est $-\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$.

Pour x^*, on obtient $-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}$, soit $\frac{5}{4} \leq \frac{1}{2}$ ce qui fait un viol de $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

3° Après avoir rajouté les variables d'écart $x_3 \in \mathbb{N}$ et $x_4 \in \mathbb{R}^+$ on a résolu la relaxation continue du problème : $x_1 = ½$ et $x_2 = 3/2$ sont en base et $x_3 = x_4 = 0$ sont hors-base. Les lignes du tableau simplexe relatives aux contraintes sont : $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{2} \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{3}{2} \end{cases}$

Donner les coupes de Gomory mixed integer dérivées de ces deux lignes et les exprimer dans les variables x_1 et x_2. Comparer avec la coupe trouvée plus haut.

Pour les deux lignes, on trouve la même coupe de Gomory mixed integer :

$$\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \geq \frac{1}{2}$$

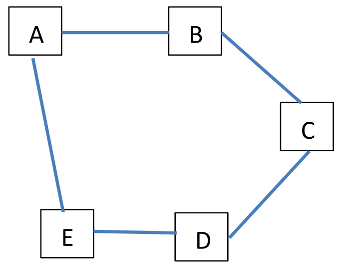
Exprimée en fonction de x_1 et x_2 on obtient :

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$$

On retrouve l'inégalité précédente obtenue par disjonction de polyèdres. Ce qui n'est pas très étonnant puisque la coupe de Gomory mixed integer est obtenue à partir de l'inégalité MIR qui elle-même est obtenue par l'inégalité en variables mixtes de base qui est une inégalité de disjonction.

<u>Stable dans un graphe</u>. Inégalité de cycle impair, lifting et problème de séparation

A° Soit le graphe $G^{(0)}$ suivant :

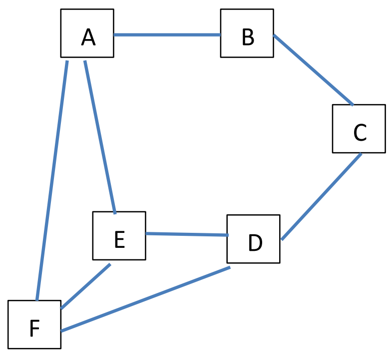


On note $X^{(0)}$ l'ensemble des vecteurs caractéristiques des stables de $G^{(0)}$° et $P^{(0)}$ l'enveloppe convexe de $X^{(0)}$.

1° Montrer que l'inégalité de *cycle impair* $x_A + x_B + x_C + x_D + x_E \leq 2$ est valide pour $X^{(0)}$.

2° Montrer qu'elle induit une facette F de $P^{(0)}$ avec $F= P^{(0)} \cap \{x : x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 2\}$.

B° Soit maintenant le graphe G suivant :



On note X l'ensemble des vecteurs caractéristiques des stables de G et P l'enveloppe convexe de X.

1° On veut déterminer α le plus haut possible tel que l'inégalité $x_A+....+ x_E+\alpha x_F \leq 2$ soit valide pour X. Modéliser par un programme linéaire en 0-1 et le résoudre.

2° On note α^* la solution optimale du programme précédent. Montrer que l'inégalité $x_A+....+....+ x_E +\alpha^* x_F \leq 2$ induit une facette de P.

3° On considère le point fractionnaire x* défini par : $x^*_A= ½$, $x^*_B= ½$, $x^*_C= ½$, $x^*_D= {}^1/_3$, $x^*_E= {}^1/_3$, $x^*_F= {}^1/_3$. Ce point ne vérifie pas les 2 inégalités précédentes mais simplement les inégalités basiques $x_i+x_j \leq 1$ pour toute arête [i,j] de G.

On veut trouver une inégalité de cycle impair violée par x*. On présente ici une méthode générale qu'on appliquera sur l'exemple.

1. Dupliquer les sommets de G : un sommet i est dupliqué en i'.
2. Construire le graphe biparti suivant : pour toute arête [i,j] de G construire 2 arêtes [i,j'] et [i',j] dans le graphe biparti et munir ces 2 arêtes du poids $1-(x^*_i+x^*_j) \geq 0$.
3. Soit un sommet i de G, chercher un plus court chemin dans le graphe biparti de i à i'. Si la valeur du plus court chemin est <1 alors on a trouvé une inégalité de cycle impair (contenant le sommet i) violée par x*. Sinon changer de sommet i et réitérer.

Appliquer cette procédure sur l'exemple et vérifier sa validité à savoir qu'elle retourne bien une inégalité de cycle impair et qui est violée si et seulement si la valeur du plus court chemin est <1 (cf. partie 3).

Correction

A° On traite le cas du graphe $G^{(0)}$

1° Validité de l'inégalité.

Le cycle est impair 2p+1=5 sommets donc dans un stable on met au plus p=2 sommets du cycle.

On peut aussi le démonter par une coupe de Chvatal. On additionne les inégalités triviales $x_A+x_B\leq 1$, …, $x_E+x_A\leq 1$ et on fait une coupe de Chvatal sur l'inégalité obtenue.

2° Facette.

Soit F la face induite par l'inégalité et H={x :gx=β} un hyperplan contenant F.

Exhibons des points de la face F= $P\cap\{x : x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 2\}$ et déduisons les coefficients de g.

Stables {A,C} et {A,D} donnent $g_C=g_D$.

Stables {B,D} et {B,E} donnent $g_D=g_E$.

Stables {C,E} et {C,A} donnent $g_E=g_A$.

Stables {D,A} et {D,B} donnent $g_A=g_B$.

Posons $\mu= g_C = g_D = g_E = g_A= g_B$. et prenons un point quelconque de la face F par exemple le stable {A,C} : ce qui donne $2\mu=\beta$. Donc l'équation gx=β s'écrit finalement $\mu\times(x_A+x_B+x_C+x_D+x_E=2)$. Ce qui signifie que la face F est bien une facette de P.

B° On traite le cas du graphe G

1° On fait ce que l'on appelle un lifting.

Il faut déterminer α=Min 2 – (x_A+….+x_E) sous les contraintes $x\in X$ et $x_F=1$ i.e. x vecteur caractéristique d'un stable de G contenant le sommet F

Ou encore Max z = x_A+….+x_E sous les contraintes $x\in X$ et $x_F=1$

On trouve la valeur optimale $z^*=1$ d'où $\alpha^*=2-1=1$.

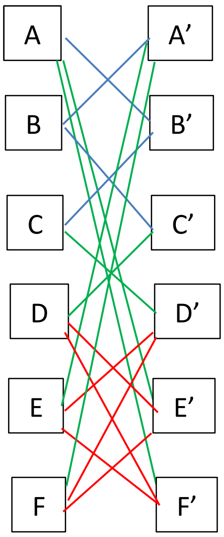
2° On peut construire la matrice suivante :

- les 5 premières colonnes sont 5 points affinement indépendants qui correspondent à la facette de $P^{(0)}$ induite par l'inégalité de cycle impair (matrice jaune).
- la dernière colonne correspond à la solution optimale du programme en 0-1 précédent avec donc $x_F=1$ (colonne rouge). Ce point sature bien l'inégalité i.e. x_A+….+ $x_E+\alpha^*x_F=2$ par construction de α^*.

x_F	0	0	0	0	0	1
x_A	.	.	.	.	.	0
x_B	.	.	.	.	.	0
x_C	.	.	.	.	.	1
x_D	.	.	.	.	.	0
x_E	.	.	.	.	.	0
	1	1	1	1	1	1

On obtient 6 points affinement indépendants ce qui montre que la dimension de la face est au moins 5. Comme elle ne peut excéder 6–1 , -1 car elle est incluse dans l'hyperplan défini par l'équation $x_A+....+ x_E+\alpha*x_F=2$, la dimension de la face est 5 soit la dimension de P–1. C'est donc une facette de P.

3°Graphe biparti :



Les arêtes bleues de poids 0, les arêtes vertes de poids 1/6 , les arêtes rouges de poids 1/3.

Regardons les chemins commençant à A et terminant à A'.

A-B'-C-D'-E-A' de poids 1/6+1/3+1/6=2/3

A-B'-C-D'-F-A' de poids 1/6+1/3+1/6=2/3

Donc deux inégalités de cycle impair violées. On recompose la première de la façon suivante :

$1-x^*_A-x^*_B+ 1-x^*_B-x^*_C+ 1-x^*_C-x^*_D + 1-x^*_D-x^*_E+ 1-x^*_E-x^*_A = 2/3 <1$

D'où $5-2x^*_A-2x^*_B -2x^*_C -2x^*_D -2x^*_E <1$

D'où $4-2x^*_A-2x^*_B -2x^*_C -2x^*_D -2x^*_E <0$

Ce qui fait l'inégalité $2 < x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 2+1/6$

Qui est une inégalité cycle avec 5 sommets (nombre impair) violée par x*.

On procède de même pour la deuxième inégalité.

Dans le cas général, le chemin parcourt 2p+1 arcs et chaque variable de sommet est comptée un nombre pair de fois dans ce parcours. Si le plus court chemin est <1, on fait passer le 1 à gauche et on retranche donc le 1 à 2p+1 ce qui fait 2p. Et on divise le tout par 2. Il faut noter que l'on n'obtient pas forcément un cycle élémentaire (le chemin peut passer plusieurs fois sur un même sommet).

Problème du sac-à-dos en 0-1. Inégalité de couverture et problème de séparation

Soit *N* un ensemble d'objets. Pour *i* appartenant à *N* soient a_i et c_i deux entiers>0 représentant respectivement le poids et la valeur de l'objet *i*. Soit *b* un entier t.q. $a_i \leq b$ pour tout *i* appartenant à *N*.

Le problème posé est comment choisir des objets dans *N* de façon à maximiser la valeur totale des objets choisis mais sans que la somme des poids des objets choisis ne dépasse *b*.

Ce problème se modélise de la façon suivante:

$$\max \sum_{i \in N} c_i x_i \text{ s.c. } \begin{cases} \sum_{i \in N} a_i x_i \leq b & (\text{sac} - \text{à} - \text{dos}) \\ x_i \in \{0,1\} & (i \in N) \end{cases}$$

avec $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si l' objet } i \text{ est choisi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On note *X* l'ensemble des vecteurs *x* satisfaisant les contraintes du problème et *P*=Conv*X* l'enveloppe convexe de X.

Soit *C* inclu dans *N*. On dit que *C* est une couverture si $\sum_{i \in C} a_i > b$.

Si *C* est une couverture alors l'inégalité $\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$ est valide pour *X* (et donc *P*) puisqu'un vecteur t.q. $x_i = 1 \quad \forall i \in C$ n'est pas dans *X*. Cette inégalité est appelée inégalité de couverture.

On dit que *C* est une couverture minimale si *C* est une couverture et *C*-{*i*} ne l'est pas pour tout *i* de *C*.

1) Donner la dimension de *P*.

2) Notons $i_{\max}$ l'objet de poids maximum dans *C* et $j_{\max}$ l'objet de poids maximum dans *N-C* . Montrer que si *C* est une couverture minimale et si *C*-{$i_{\max}$}+{$j_{\max}$} n'est pas une couverture alors l'inégalité de couverture induit une facette de *P*.

3) Soit *x** un vecteur de $[0,1]^M$. Montrer que la recherche d'une inégalité de couvertue violée par *x** revient à résoudre le problème suivant:

$$\min_z \sum_{i \in N} (1 - x_i^*) z_i \text{ s.c. } \begin{cases} \sum_{i \in N} a_i z_i \geq b + 1 \\ z_i \in \{0,1\} & (i \in N) \end{cases}$$

avec $z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

4) On considère maintenant le problème défini par le tableau suivant:

objets	1	2	3	4	5
valeurs	6	4	3	1	1
poids	3	2	2	1	1
b	6				

Soit $x^* = \left(1, 1, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$ la solution du problème relaché dans lequel les conditions d'intégrité sur les variables x_i sont relachées à $x_i \in [0,1]$.

Chercher l'inégalité de couverture la plus violée par x^*.

5) Si $a_{j_{\max}} \geq a_{i_{\max}}$ alors C-$\{i_{\max}\}$+$\{j_{\max}\}$ est toujours une couverture et on ne peut pas appliquer le résultat de la question 2.

Proposer dans ce cas une amélioration de l'inégalité de couverture en considérant l'ensemble $C^+ = \left\{ j \in N - C\text{: } a_j \geq a_{i_{\max}} \right\}$ et donner les conditions sous lesquelles cette nouvelle inégalité induit une facette de *P*. Vérifier que ces conditions sont plus faibles que celles demandées à la question 2.

Correction (sac-à-dos en 0-1, inégalité de couverture)

1° La dimension de P est pleine car chaque objet *i* peut être mis individuellement dans le sac ($a_i \leq$b).

2° Couverture minimale C et F la face induite par inégalité de couverture. F est-elle une facette ?

Ici pour faire la démonstration, il est peut-être plus simple de revenir à la définition de la dimension et chercher le nombre suffisant de points affinement indépendants de F.

Les points significatifs sont listés dans le tableau ci-dessous en colonne. Ils saturent bien l'inégalité de couverture (satisfaite avec égalité) car dans chaque colonne le nombre de 1 est |C|-1. Les points tiennent chacun dans le sac car :

- C est minimale (dès qu'on retire un élément de C, ce n'est plus une couverture)
- Si on retire i_{max} de C on peut le remplacer par un élément quelconque de N\C dans le sac

i_{max}	**0**	1	1	1	0	0	…	0
C\{ i_{max}]	1	**0**	1	1	1	1	…	1
	1	1	…	1	1	1	…	1
	1	1	1	**0**	1	1	…	1
N\C	0	0	…	0	**1**	0	0	0
	0	0	…	0	0	**1**	…	0
	…	…	…	…	…	….	…	…
	0	0	…	0	0	0	0	**1**

La matrice M des points se décompose en $\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Elle a une structure triangulaire supérieure et sur la diagonale :

- A carrée $|C|\times|C|$ est inversible
- B carrée $|N\backslash C|\times|N\backslash C|$ est l'identité donc inversible

Finalement M carrée $|N|\times|N|$ est inversible. Les |N| points exhibés sont donc linéairement indépendants et a fortiori affinement indépendants. La dimension de F est donc |N|-1 ce qui est exactement la dimension de P moins 1.

3° Si on trouve une valeur du problème de séparation <1 , on a une inégalité de couverture violée et la couverture *C* est l'ensemble des i t.q. z_i=1. *C* est bien une couverture car son poids dépasse de 1 la capacité b du sac.

Regardons l'objectif. L'objectif est composé de la somme des z_i qui vaut donc |C| et de moins la somme des x_i* pour i appartenant à C. Le tout est inférieur à 1, ce qui donne $|C|-1<\Sigma_{i\in C}x_i^*$. C'est bien une inégalité de couverture violée par x*.

4° Le problème de séparation de l'inégalité de couverture pour le point x* donné dans l'énoncé est :

min ½ $z_3 + z_4 + z_5$ s.c. $3z_1+2z_2+2z_3+z_4+z_5 \geq 7$ et z_i = 0 ou 1.

Visiblement, la solution est $z_1=z_2=z_3=1$ et $z_4=z_5=0$, de valeur ½ <1. Donc l'inégalité trouvée est $x_1+x_2+x_3 \leq 2$ et elle est bien violée par x*.

5° L'inégalité est $\sum_{i \in C \cup C^+} x_i \leq |C| - 1$. C'est l'inégalité de couverture *étendue*. Elle est bien valide car les i de C^+ ont un poids supérieur ou égal aux poids des i de C, et déjà parmi les éléments i de C on ne pouvait en prendre que |C|-1 maximum donc on ne pourra pas faire mieux en rajoutant les éléments de C^+ qui sont plus lourds.

Pour « balayer » les éléments de C^+ dans l'inégalité étendue nous allons devoir retirer 2 éléments de C, autant retirer les 2 plus lourds. L'élément le plus lourd de C est i_{max} et on note $i1_{max}$ le suivant. Et la condition sera $C \cup \{ j_{max} \} \backslash \{ i_{max}, i1_{max} \}$ n'est pas une couverture qui remplace *C*-{i_{max}}+{j_{max}} n'est pas une couverture.

Par ailleurs, il faut aussi « balayer » les éléments de $N \backslash \{C \cup C^+\}$ dans l'inégalité étendue. On note k_{max} l'élément le plus lourd dans cet ensemble, ce qui fait la condition *C*-{i_{max}}+{k_{max}} n'est pas une couverture, autrement dit les |C|-1 éléments les plus légers de C et l'élément le plus lourd de $N \backslash \{C \cup C^+\}$ tiennent dans le sac. C'est une condition similaire à celle de la question 2 mais moins contraignante car le poids de l'objet k_{max} est inférieur ou égal à celui de j_{max}.

Avec ces conditions, on peut de manière analogue à la question 2° exhiber |N| points affinement indépendants et saturant l'inégalité de couverture étendue c'est-à-dire des points satisfaisant l'inégalité avec égalité c'est-à-dire des points avec exactement |C|-1, 1 dans les coordonnées d'indices i de $C \cup C^+$.

i_{max}	**0**	1	1	1	0	0	…	0	0	0	…	0
$i1_{max}$	1	**0**	1	1	1	1	…	1	0	0	…	0
$C \backslash \{i_{max}, i1_{max}\}$	1	1	…	1	1	1	…	1	1	1	…	1
	1	1	1	**0**	1	1	…	1	1	1	…	1
$N \backslash \{C \cup C+\}$	0	0	…	0	**1**	0	0	0	0	0	…	0
	0	0	…	0	0	**1**	…	0	…			…
	…	…	…	…	…	….	…	…	…			…
	0	0	…	0	0	0	0	**1**	0	0	…	0
C^+	0	0	…	0	0	0	…	0	**1**	0	…	0
	…			…	…			…	0	**1**	0	0
	…			…	…			…	…	0	…	
	0	0	…	0	0	0	…	0	0	0	…	**1**

La matrice M a une structure triangulaire supérieure $\begin{pmatrix} A & E & F \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$

A est la même matrice que dans la question 2, B et D sont les matrices identité. A, B et D sont carrées et inversibles. Ce qui entraine que M est inversible. Ses colonnes, au nombre de |N|, sont donc linéairement indépendantes (a fortiori affinement indépendantes). La face induite par l'inégalité de couverture étendue est donc une facette de P.

Localisation d'entrepôt sans contraintes de capacité (Uncapicited Facility Location problem). Etude du polytope associé : dimension, facettes.

Soient n entrepôts, m clients. Chaque client doit être affecté à un unique entrepôt. Un client ne peut être affecté à un entrepôt que si ce dernier est ouvert. Le coût d'ouverture d'un entrepôt j est c_j. Le coût de raccordement d'un client i à un entrepôt j est q_{ij}. On doit ouvrir des entrepôts (parmi les n disponibles) de telle sorte que les coûts d'ouverture et de raccordement des clients aux entrepôts est minimum. Le problème se modélise par un programme linéaire (P_{0-1}) en variables 0-1 :

variables x_j=1 si entrepôt j est ouvert, =0 sinon ; y_{ij}=1 si le client i est raccordé à l'entrepôt j, =0 sinon.

(P_{0-1}) $$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_{ij}$$

sous les contraintes $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1 & i = 1, \dots, m \quad (A) \\ y_{ij} \le x_j & i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \quad (B) \\ x_j, y_{ij} \in \{0,1\} & i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \end{cases}$

La première famille de contraintes (A) sont les contraintes d'affectation d'un client i (i=1 à m), à exactement un des entrepôts.

La deuxième famille (B) impose que l'on ne peut raccorder un client i à un entrepôt j que si ce dernier est ouvert (x_j=1).

On note X l'ensemble des solutions réalisables de (P_{0-1}). On note P=Conv(X) l'enveloppe convexe de X.

1-Montrer que les seules égalités contenant P sont les m contraintes d'affectation des clients. Pour cela considérer un hyperplan H={(x,y) : gx+hy=β} contenant P et montrer que l'égalité gx+hy=β est une combinaison linéaire des m contraintes d'affectation.

En déduire que dim(P)=mn+n–m. Vérifier bien l'indépendance linéaire des m contraintes d'affectation (A).

2-Montrer que les inégalités $y_{ij} \le x_j$ induisent des facettes de P.

3-Soient i_1, i_2, i_3 3 indices de clients distincts entre 1 et m , j_1, j_2 ,j_3 3 indices d'entrepôts distincts entre 1 et n. Montrer que $y_{i_1 j_1} + y_{i_1 j_2} + y_{i_2 j_2} + y_{i_2 j_3} + y_{i_3 j_3} + y_{i_3 j_1} \le 1 + x_{j_1} + x_{j_2} + x_{j_3}$ est une inégalité valide pour X en montrant que c'est une coupe de Chvatal.

4-On considère m=n=3. Montrer que le point $y_{11} = y_{12} = y_{22} = y_{23} = y_{33} = y_{31} = \frac{1}{2} = x_1 = x_2 = x_3$ vérifie les contraintes de la relaxation continue de (P_{0-1}) dans laquelle on relâche les contraintes d'intégrité. Montrer que ce point ne vérifie pas l'inégalité valide $y_{11} + y_{12} + y_{22} + y_{23} + y_{33} + y_{31} \le 1 + x_1 + x_2 + x_3$.

5-On considère m=n=3. Montrer que $y_{11} + y_{12} + y_{22} + y_{23} + y_{33} + y_{31} \le 1 + x_1 + x_2 + x_3$ induit une facette de P.

Correction (localisation d'entrepôts sans contrainte de capacité UFL)

1° On a donc X⊂ConvX⊂H. On considère les points de X suivants.

- Première famille de points de X

$x_j = 1\ (j = 1, \dots, n)$ et considérons un client i. On l'affecte dans un premier point à un entrepôt j_1 i.e. $y_{ij_1} = 1$ et dans un deuxième point à un entrepôt j_2 i.e. $y_{ij_2} = 1$. Les autres clients sont affectés aux mêmes entrepôts dans les deux points. Ces 2 points de X sont donc aussi dans H et vérifient donc gx+hy=β. On en tire que $h_{ij_1} = h_{ij_2}$. Ceci étant vrai quelque soient j_1 et j_2, on en déduit que h_{ij} est indépendant de j et on peut donc poser h_i=h_{ij} pour tout j=1,…,n et pour tout i=1,…,m.

- Deuxième famille de points de X

Dans un premier point, on ouvre tous les entrepôts i.e. $x_j = 1\ (j = 1, \dots, n)$ et dans un deuxième point on ferme le j_1 i.e. $x_{j_1} = 0$. Les clients sont affectés sur n'importe quels entrepôts non fermés dans les deux points. Comme précédemment ces deux points vérifient gx+hy=β. Ce qui donne :

$g_{j_1} + \sum_{i=1}^{m} h_i = \sum_{i=1}^{m} h_i$ soit encore $g_{j_1} = 0$ et ceci quelque-soit l'entrepôt j_1.

Maintenant en prenant un point quelconque de X on obtient la relation liant nécessairement les h_i et β en reportant ce point dans l'équation gx+hy=β : $\sum_{i=1}^{m} h_i = \beta$. Donc cette équation gx+hy=β s'écrit finalement $\sum_{i=1}^{m} h_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} h_i$ et elle est par conséquent une combinaison linéaire (de coefficients h_i) des équations $\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1$. Il est facile de vérifier que ces *m* équations ne sont pas liées puisque chacune comporte ses propres variables. Donc la dimension de P est mn+n-m c'est-à-dire le nombre de variables moins le nombre d'égalités.

2° Comme aucun entrepôt ou client ne joue un rôle particulier, on peut considérer l'inégalité $y_{11} \leq x_1$ c'est-à-dire considérer i=1 et j=1. La démonstration pour les autres inégalités s'obtiendra par permutation des indices.

On considère maintenant les points de X qui satisfont $y_{11} = x_1$. Soit H un hyperplan d'équation gx+hy=β et contenant les points de X qui satisfont $y_{11} = x_1$.

- Première famille de points

$x_j = 1\ (j = 1, \dots, n)$ et donc $y_{11} = 1$ et considérons un client i≠1. On l'affecte dans un premier point à un entrepôt j_1 i.e. $y_{ij_1} = 1$ et dans un deuxième point à un entrepôt j_2 i.e. $y_{ij_2} = 1$. Les autres clients sont affectés aux mêmes entrepôts dans les deux points. Ces 2 points sont dans $X \cap \{(x, y): y_{11} = x_1\}$ donc aussi dans H et vérifient donc gx+hy=β. On en tire que $h_{ij_1} = h_{ij_2}$. Ceci étant vrai quelque soient j_1 et j_2, on en déduit que h_{ij} est indépendant de j et on peut donc poser h_i=h_{ij} pour tout j=1,…,n et pour tout i=2,…,m.

- Deuxième famille de points

Dans un premier point, on ouvre tous les entrepôts i.e. $x_j = 1\ (j = 1, \dots, n)$ et dans un deuxième point on ferme l'entrepôt j_1≠1 i.e. $x_{j_1} = 0$. Les clients i≠1 sont affectés sur n'importe quels entrepôts non fermés dans les deux points et le client 1 est affecté à l'entrepôt 1 i.e. $y_{11} = 1$ de façon à avoir $y_{11} = x_1$. Comme précédemment ces deux points vérifient gx+hy=β. Ce qui donne :

$g_{j_1} + \sum_{i=2}^{m} h_i = \sum_{i=2}^{m} h_i$ soit encore $g_{j_1} = 0$ et ceci quelque-soit l'entrepôt $j_1 \neq 1$.

- Troisième famille de points

On ouvre tous les entrepôts j≠1 i.e. $x_j = 1$. Les clients i≠1 sont affectés aux entrepôts j≠1 de façon quelconque. Maintenant on complète en décidant de l'ouverture ou non de l'entrepôt 1.

Dans un premier point, on ouvre l'entrepôt 1 i.e. $x_1 = 1$ et donc forcément le client 1 est affecté à l'entrepôt 1 i.e. $y_{11} = 1$ pour avoir $y_{11} = x_1$. Dans un deuxième point, on ferme l'entrepôt 1 i.e. $x_1 = 0$ et le client 1 est affecté à n'importe quel autre entrepôt j≠1. Comme précédemment ces deux points vérifient gx+hy=β. Ce qui donne $g_1 + h_{11} + \sum_{i=2}^{m} h_i = h_{1j} + \sum_{i=2}^{m} h_i$ ∀j≠1 soit encore :

$g_1 + h_{11} = h_{1j}$ ∀j≠1

Maintenant en prenant un point quelconque de $X \cap \{(x,y): y_{11} = x_1\}$ on obtient la relation liant nécessairement les g_1, h_{11}, h_i et β. Prenons un point t.q. $y_{11} = x_1 = 1$. En reportant ce point dans l'équation gx+hy=β on obtient : $g_1 + h_{11} + \sum_{i=2}^{m} h_i = \beta$.

Nous avons l'identité $g_1 x_1 + h_{11} y_{11} = g_1 x_1 - g_1 y_{11} + (h_{11} + g_1) y_{11}$

Donc cette équation gx+hy=β s'écrit finalement $g_1(x_1 - y_{11}) + (h_{11} + g_1) \sum_{j=1}^{n} y_{1j} + \sum_{i=2}^{m} h_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \right) = g_1 + h_{11} + \sum_{i=2}^{m} h_i$ et elle est par conséquent une combinaison linéaire des équations $\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1$ pour i≥2 (de coefficients h_i), de l'équation $\sum_{j=1}^{n} y_{1j}$=1 (de coefficient $h_{11} + g_1$) et de l'équation $x_1 - y_{11}$ (de coefficient g_1). Donc la dimension de la face $F = P \cap \{(x,y): y_{11} = x_1\}$ est la dimension de P moins 1 car un seul hyperplan (d'équation $y_{11}=x_1$) se rajoute aux différents hyperplans contenant P. F est donc une facette de P.

3° On considère pour simplifier notations les clients 1,2 et 3 et les entrepôts 1,2 et 3.

Les contraintes (B) imposent que

$$\begin{cases} y_{11} \leq x_1 \,, y_{12} \leq x_2 \;\; pour\ le\ client\ 1 \\ y_{22} \leq x_2 \,, y_{23} \leq x_3 \;\; pour\ le\ client\ 2 \\ y_{33} \leq x_3 \,, y_{31} \leq x_1 \;\; pour\ le\ client\ 3 \end{cases}$$

Les contraintes (A) pour les clients 1, 2 et 3. Dans chacune on garde uniquement les entrepôts 1, 2 ou 3 :

$$\begin{cases} y_{11} + y_{12} \leq 1 \;\; pour\ le\ client\ 1 \\ y_{22} + y_{23} \leq 1 \;\; pour\ le\ client\ 2 \\ y_{33} + y_{31} \leq 1 \;\; pour\ le\ client\ 3 \end{cases}$$

On additionne les 6 inégalités :

$$\begin{cases} 2y_{11} + 2y_{12} + \\ 2y_{22} + 2y_{23} + \\ 2y_{33} + 2\,y_{31} \\ \leq 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3 \end{cases}$$

On divise par 2. La constante devient 3/2 . La coupe de Chvatal consiste à l'arrondir au plus proche entier inférieur soit 1.

$$\begin{cases} y_{11} + y_{12} + \\ y_{22} + y_{23} + \\ y_{33} + y_{31} \\ \leq x_1 + x_2 + x_3 + 1 \end{cases}$$

4° Avec le point spécifié, on obtient 6/2 à gauche et 5/2 à droite. Ce point fractionnaire viole la contrainte précédente.

5° Dans le cas m=3 clients et n=3 dépôts, P, l'enveloppe convexe de X, est de dimension mn+n-m=9+3-3=9 (question 1). Pour démontrer que l'inégalité précédente induit une facette de P, dans ce cas, il suffit d'exhiber 9 points affinement indépendants de X et satisfaisant l'inégalité avec égalité (la dimension induite est 9-1 soit la dimension de P moins 1). Ici, il y a exactement 9 points de X qui saturent l'inégalité i.e. la vérifie avec égalité. On démontre assez facilement qu'ils sont linéairement indépendants (donc affinement indépendants).

X1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
X2	0	1	0	1	1	0	0	1	1
X3	0	0	1	0	0	1	1	1	1
Y11	1	0	0	1	0	1	1	0	0
Y12	0	1	0	0	1	0	0	1	1
Y13	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Y21	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Y22	0	1	0	1	1	0	0	1	0
Y23	0	0	1	0	0	1	1	0	1
Y31	1	0	0	1	1	1	0	0	0
Y32	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Y33	0	0	1	0	0	0	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1

On écrit $\sum_{k=1}^{9} \lambda_k P_k = 0$ où P_k sont les points exhibés ci-dessus.

On trouve facilement : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

On démontre que les autres λ sont nuls aussi. Donc les points sont affinement indépendants.

Choix d'option pour des étudiants : coupe de Chvatal, facette, inégalité de cycle impair, problème de séparation

Les élèves doivent choisir des options parmi un ensemble de 6 options O1,…,O6. Une option prend toute la journée. L'emploi du temps hebdomadaire des options est le suivant :

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
O1	x		x		
O2			x	x	
O3				x	x
O4		x			x
O5	x	x			
O6	x	x			

La question qui se pose est : combien d'options un élève peut-il suivre au maximum ?

1° Modéliser le problème par un programme linéaire $PL_{0\text{-}1}$ en variables 0-1 avec x_i=1 si et seulement si l'option Oi est choisie.

2° Vérifier que $x_1=½$, $x_2=½$, $x_3=½$, $x_4=½$, $x_5=½$, $x_6=0$, est une solution réalisable de la relaxation continue de $PL_{0\text{-}1}$. Que vaut au minimum la valeur de la relaxation continue ?

3° On note X l'ensemble des solutions réalisables du problème $PL_{0\text{-}1}$. Montrer en utilisant une coupe de Chvatal que $x_1+ x_2+ x_3+ x_4+ x_5+ x_6 \leq 2$ est une inégalité valide pour X.

4° Montrer que l'inégalité précédente induit une facette de ConvX l'enveloppe convexe de X.

5° Modéliser le problème comme la recherche d'un stable maximum dans un graphe que l'on déterminera. Trouver alors une inégalité de cycle impair violée par le point de la question 2 en cherchant un plus court chemin dans un graphe biparti et avec des poids sur les arêtes à déterminer.

Correction. Choix d'options

1° $PL_{0\text{-}1}$ est le problème suivant :

$$\max_x z = \sum_{i=1}^{6} x_i$$

Sous les contraintes
$$\begin{cases} x_1 + x_5 + x_6 \leq 1 & (L) \\ x_4 + x_5 + x_6 \leq 1 & (M) \\ x_1 + x_2 \leq 1 & (Me) \\ x_2 + x_3 \leq 1 & (J) \\ x_3 + x_4 \leq 1 & (V) \\ x_i \in \{0,1\}\ i = 1 \text{ à } 5 & \end{cases}$$

2° Relaxation continue de $PL_{0\text{-}1}$.

Le point donné satisfait toutes les contraintes (L), (M),…, (V).

Ce point donne z=2,5 . Donc la valeur de la relaxation continue vaut au moins 2,5.

3° On additionne les inégalités (L), (M),…,(V) et on obtient :

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leq 5$$

On divise cette inégalité par 2 et le second membre devient 2,5. Le membre gauche ne comportant que des coefficients entiers (1 en l'occurrence) et chaque x_i étant entier, on peut arrondir 2,5 à l'entier immédiatement inférieur c'est-à-dire 2.

4° On considère les points suivants de ConvX (et même de X) satisfaisant l'inégalité à l'égalité c'est-à-dire tels que $x_1+ x_2+ x_3+ x_4+ x_5+ x_6 = 2$.

	Point 1	Point 2	Point 3	Point 4	Point 5	Point 6	Point 7
x_1	1	1	0	0	0	0	0
x_2	0	0	1	1	1	0	0
x_3	1	0	0	0	0	1	1
x_4	0	1	1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0	1	0
x_6	0	0	0	0	1	0	1

Pour montrer que F induit une facette, on pourrait démontrer que ces points sont affinement indépendants. Mais on va plutôt utiliser le théorème de cours (caractérisation des facettes).

Soit $H=\{x : a_1x_1+ a_2x_2+ a_3x_3+ a_4x_4+ a_5x_5+ a_{.}x_6 = b\}$ un hyperplan contenant $F=\{x : x_1+ x_2+ x_3+ x_4+ x_5+ x_6 = 2\}\cap$ConvX.

Les 7 points exhibés sont dans F et donc H et donc satisfont :

$a_1+ a_3 = b$, $a_1+ a_4 = b$, $a_2 + a_4 = b$, $a_2 + a_5 = b$, $a_2 + a_6 = b$, $a_3 + a_5 = b$, $a_3 + a_6 = b$

On tire de ce système d'égalités que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6$. Notons β cette valeur commune aux 6 coefficients. En reportant un des 7 points dans l'équation de H, on obtient $2\beta=b$.

Finalement, l'équation de H s'écrit $\beta(x_1+ x_2+ x_3+ x_4+ x_5+ x_6)=2\beta$. C' est donc l'équation $x_1+ x_2+ x_3+ x_4+ x_5+ x_6 = 2$ multipliée par β. On peut alors invoquer le théorème de caractérisation des facettes et dire que l'inégalité (valide) $x_1+ x_2+ x_3+ x_4+ x_5+ x_6 \leq 2$ induit une facette de ConvX.

Notons que par la même occasion, on a montré que ConvX est de dimension pleine car sinon il serait apparu l'équation d'un autre hyperplan contenant F (cf. le théorème).

5°. C'est un graphe d'exclusion entre les options. Le graphe a pour sommets O1, O2,…,O6. On met une arête entre 0i et Oj si les options Oi et Oj ont lieu le même jour (on ne peut pas les choisir en même temps). On note G le graphe.

A partir de G, on construit le graphe biparti suivant : les sommets sont X={01,…,O6} et X'={O'1,…,O'6} et on met une arête entre Oi et O'j et une arête entre O'i et Oj si et seulement si il y a une arête [Oi,Oj] dans le graphe G. Sur l'arête [Oi , O'j] et l'arête [O'i , Oj] du graphe biparti on met le poids $1-x_i-x_j$ où $x_1=½$, $x_2=½$, $x_3=½$, $x_4=½$, $x_5=½$, $x_6=0$ sont les coordonnées du point fractionnaire de la question 2. On cherche ensuite un plus court chemin dans le graphe biparti d'un sommet Oi à son homologue O'i. Par exemple, cherchons un plus court chemin de O1 à O'1. On trouve le chemin O1-O'2-O3-O'4-O5-O'1 de poids total nul. C'est donc bien un plus court chemin puisque les poids sont positifs ou nul. Ce chemin correspond au cycle impair dans G : O1-O2-O3-O4-O5-O1. Le poids total est strictement inférieur à 1 et on a donc une inégalité de cycle impair violée par le point de la question 2. L'inégalité est $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \leq 2$. Le second membre 2 est obtenu en divisant le nombre de sommets du cycle (ici 5) par 2 et en arrondissant à l'entier immédiatement inférieur.