EXERCICES

Exercices

Dimension et faces élémentaires du Quadric Polytope

On considère le problème quadratique en variables 0-1 suivant:

$$\min \sum_{1\le i\le n} c_i x_i + \sum_{1\le i,\, j\le n} c_{ij} x_i x_j \text{ s.c. } x_i \in \{0,1\} \ \ 1\le i\le n$$

où n est un entier supérieur ou égal à 2.

1) Proposer une linéarisation du problème en rajoutant $\frac{1}{2}n(n-1)$ nouvelles variables et $2n(n-1)$ nouvelles contraintes, en gardant toutefois le caractère 0-1 des variables x.

2) On note $BP_n = \left\{(x,y)\in\{0,1\}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} : \ y_{ij} = x_i x_j \ 1\le i<j\le n\right\}$ et $QP_n = \mathrm{Conv}BP_n$.

a) Pour n=2 et 3, exhiber les points de BP_n. Quel est le cardinal de BP_n en fonction de n ?

Pour n=2, dessiner QP_n.

b) Exhiber $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ points de BP_n affinement indépendants. En déduire la dimension de QP_n.

c) On considère les 4 inégalités valides pour BP_n suivantes:

$f(x,y) = y_{ij} \ge 0$

$f(x,y) = x_i - y_{ij} \ge 0$

$f(x,y) = x_j - y_{ij} \ge 0$

$f(x,y) = y_{ij} - x_i - x_j + 1 \ge 0$

Dans chacun des 4 cas, donner la dimension de $QP_n \cap f^{-1}(0) = Conv\left(BP_n \cap f^{-1}(0)\right)$ où $f^{-1}(0) = \{(x,y): f(x,y)=0\}$.

En déduire la nature des faces de QP_n induites par ces 4 inégalités.

Dimension de l'hypersimplex polytope.

1) Soit $M\subset\mathbb{R}^d$. Montrer que Aff$M$=Aff(Conv$M$).

2) Soit le polytope $\Delta_{d,k} = \mathrm{Conv}\left\{x\in\{0,1\}^d : \sum_{i=1,\ldots,d} x_i = k\right\}$ avec $1\le k\le d-1$ entier.

Montrer que la dimension de $\Delta_{d,k}$ est $d-1$. Qu'en est-il si k=0 ou k=d ?

Enveloppe affine du Quadric Polytope sous une contrainte de cardinalité.

Soit $2\le k\le n-2$ et $BP_{n,k} = \left\{(x,y)\in\{0,1\}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} : \sum_{i=1,n} x_i = k,\ y_{ij} = x_i x_j \ 1\le i<j\le n\right\}$.

1) Montrer que pour $1\le i\le n$ $\sum_{1\le j<i} y_{ji} + \sum_{i<j\le n} y_{ij} - (k-1)x_i = 0 \ \ \forall (x,y)\in BP_{n,k}$.

2) Soit $f(x,y) = a_0 + \sum_{i=1,n} a_i x_i + \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij} y_{ij}$ t.q. $\forall (x,y)\in BP_{n,k}$ $f(x,y)=0$. On notera indifféremment a_{ij} ou a_{ji} pour $i<j$.

2.1) Montrer que $a_{ij} - a_{i'j} = a_{ih} - a_{i'h}$ pour tout quadruplet d'indices distincts i, i', j, h.

2.2) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ solution du système (inversible) $\begin{cases} a_{12} = \lambda_1 + \lambda_2 \\ a_{13} = \lambda_1 + \lambda_3 \\ a_{23} = \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$ et $\forall i \geq 4\ \lambda_i$ défini par $a_{1i} = \lambda_1 + \lambda_i$ et finalement λ_0 défini par $a_1 = \lambda_0 - (k-1)\lambda_1$.

Montrer que $a_{ij} = \lambda_i + \lambda_j\ 1 \leq i < j \leq n$ et $a_i = \lambda_0 - (k-1)\lambda_i\ i = 1,..,n$.

3) En déduire que $f(x,y) = \lambda_0 \left(\sum_{i=1,n} x_i - k\right) + \sum_{i=1,n} \lambda_i \left(\sum_{1 \leq j < i} y_{ji} + \sum_{i < j \leq n} y_{ij} - (k-1)x_i\right)$

et donner l'intersection des hyperplans contenant $BP_{n,k}$.

4) Donner la dimension de l'enveloppe affine de $BP_{n,k}$.

Enveloppe affine du polytope des cycles hamiltoniens

On considère K_n le graphe complet de n sommets et $n \geq 3$. On numérote les sommets de 1 à n et on note N={1,2,...,n} et E={{i,j}: i,j parcourent N et $i \neq j$} qui est l'ensemble des arêtes de K_n.

Un cycle hamiltonien de K_n est une séquence de n arêtes e_1, e_2,..., e_n t.q. $e_1=\{i_1,i_2\}$, $e_2=\{i_2,i_3\}$,..., $e_n=\{i_n,i_1\}$ où $\{i_1,i_2,...,i_n\}$=N c'est-à-dire un cycle de longueur n passant par tous les sommets.

Pour chaque cycle hamiltonien T, on note x^T son vecteur caractéristique défini par $x_e^T = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. x^T est donc un vecteur à $|\mathrm{E}| = \frac{1}{2}n(n-1)$ composantes.

On note T(n)={x^T: T est un cycle hamiltonien de K_n } l'ensemble des vecteurs caractéristiques de cycle hamiltonien.

Dans la suite une arête {i,j} sera notée $i\,j$ quand elle apparaitra comme indice d'une variable ou d'un coefficient.

1) Vérifier que tout x^T appartenant à T(n) satisfait l'égalité $f_i(x^T) = 0$ où f_i est la fonction affine définie par $f_i(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_{ij} - 2$ pour tout i appartenant à N.

2) Soit $f(x) = \sum_{e \in E} a_e x_e + a_0$ t.q. $f(x^T) = 0\ \forall x^T \in \mathrm{T}(n)$

2.1) Montrer que $a_{1j} + a_{ih} = a_{ij} + a_{1h}$ pour tout quadruplet d'indices distincts $1, i, j, h$ ($n \geq 4$).

2.2) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ définis comme solution du système (inversible) $\begin{cases} a_{12} = \lambda_1 + \lambda_2 \\ a_{13} = \lambda_1 + \lambda_3 \\ a_{23} = \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$ et pour $4 \leq i \leq n$ λ_i défini par l'équation $a_{1i} = \lambda_1 + \lambda_i$.

Montrer que $a_{ij} = \lambda_i + \lambda_j$ pour toute arête {i,j} de K_n et que $a_0 = -2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

3) En déduire que $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x)$ et donner l'intersection des hyperplans contenant T(n).
4) Donner la dimension de l'enveloppe affine de T(n).

Graphe du Quadric Polytope

Pour $n \geq 2$ soit $BP_n = \left\{ (x,y) \in \{0,1\}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} :\ y_{ij} = x_i x_j \ 1 \leq i < j \leq n \right\}$ et $QP_n = \text{Conv}BP_n$.
On note $N=\{1,\ldots,n\}$.
On note $z=(x,y)$ et pour $S \subset N$ z^S le point de BP_n t.q. $x_i = 1\ i \in S,\ x_i = 0\ i \in N-S$. On a $z^{\varnothing}=0$.
Pour $M \subset N$ soit l'application ψ_M définie par $\psi_M(z)=z'$ t.q.

$$\begin{cases} x'_i = 1 - x_i & i \in M \\ x'_i = x_i & i \in N-M \\ y'_{ij} = x_j - y_{ij} & \left.\begin{matrix} i<j \\ j<i \end{matrix}\right\} i \in M, j \in N-M \\ y'_{ji} = x_j - y_{ji} & \\ y'_{ij} = 1 - x_i - x_j + y_{ij} & i,j \in M, i<j \\ y'_{ij} = y_{ij} & i,j \in N-M, i<j \end{cases}$$

ψ_M est bijective et affine. De plus $\psi_M(z^V) = z^{(V-M)\cup(M-V)}$ et $z^V = \psi_M(z^{(V\cup M)-(M\cap V)})$. Donc ψ_M transforme un point de BP_n en un point de BP_n et tout point de BP_n est l'image d'au moins un point de BP_n. Donc $\psi_M(BP_n)=BP_n$ et $\psi_M(QP_n)=QP_n$.

1) Donner l'application t.q. pour $S \neq T$ le segment $[z^S, z^T]$ est l'image de $[z^{\varnothing}, z^{T'}]$ avec $T' \neq \varnothing$.
2) Montrer que le segment $[0, z^S]$ avec $S \neq \varnothing$ est une face de QP_n.
3) En déduire que tout segment $[z^S, z^T]$ pour $S \neq T$ est une face de QP_n.
4) Soit G(QP_n) le graphe dont les sommets sont les points extrêmes de QP_n (c'est-à-dire BP_n) et les arêtes les faces de dimension 1 de QP_n. Quel est le diamètre de G(QP_n)?

Polytope des stables d'un cycle impair

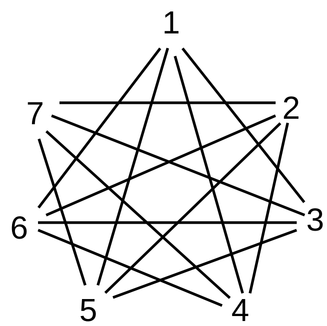
Soit $G=(V,E)$ le graphe d'un cycle impair où $V=\{1,2,\ldots,2k+1\}$ ($k \geq 2$) et $E=\{(1,2),(2,3),\ldots,(2k,2k+1),(2k+1,1)\}$.
Un stable de G est un ensemble S de sommets de G t.q. 2 quelconques d'entre eux ne soient pas reliés par une arête. Si S est un stable alors le vecteur caractéristique de S est le vecteur x^S indexé par les sommets de G et t.q. $x_i^S = 1$ si le sommet i est dans S et 0 sinon.
On note $S(G)$ l'ensemble des vecteurs caractéristiques des stables de G.

Etant donnée une inégalité $f(x) \le \alpha$ valide pour $S(G)$ c'est-à-dire vérifiée par tous les vecteurs caractéristiques de stables de G, la face de Conv$S(G)$ induite par cette inégalité est par définition $\{x: f(x) = \alpha\} \cap \text{Conv}S(G)$ c'est-à-dire l'ensemble des points de Conv$S(G)$ qui "saturent" cette inégalité.
1) Montrer que les inégalités valides $x_i \ge 0\ i \in V, x_i + x_j \le 1\ (i,j) \in E$ induisent des facettes de Conv$S(G)$.
2) On note $P(G)$ le polyèdre défini par l'ensemble des solutions du système d'inégalités $x_i \ge 0\ i \in V, x_i + x_j \le 1\ (i,j) \in E$.
Montrer que le point x^* de coordonnées $x_i^* = \frac{1}{2}$ pour tout $i \in V$ est un point extrême de $P(G)$.
3) Montrer que l'inégalité $\sum_{i \in V} x_i \le k$ est valide pour $S(G)$ et qu'elle induit une facette de Conv$S(G)$.
4) Soit G^+ le graphe obtenu en rajoutant à G un sommet, noté 0, relié à tous les autres sommets de G sauf un. On note $S(G^+)$ l'ensemble des vecteurs caractéristiques des stables de G^+.
Montrer que $\sum_{i \in V} x_i \le k$ n'induit pas une facette de Conv$S(G^+)$.
Déterminer α maximum t.q. l'inégalité $\alpha x_0 + \sum_{i \in V} x_i \le k$ soit valide pour $S(G^+)$. Montrer qu'alors l'inégalité obtenue induit une facette de Conv$S(G^+)$.

Polytope des stables d'un anticycle impair

I. Résultat préliminaire.
Soit le polytope P=Conv$S$ avec $S=\{x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(p)}\}$ un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^d$ et soit f une fonction affine t.q. $P \subset f^{-1}(]-\infty,0])$ (i.e. $\forall x \in P\ f(x) \le 0$).
Soit $F = P \cap f^{-1}(0)$ la face de P induite par f.
Montrer que $F = \text{Conv}(S \cap f^{-1}(0))$.

II.
Soit le graphe G suivant:



Un stable de G est un ensemble S de sommets de G t.q. 2 quelconques d'entre eux ne soient pas reliés par une arête. Si S est un stable alors le vecteur caractéristique de S est le vecteur x^S indexé par les sommets de G et t.q. $x_i^S = 1$ si le sommet i est dans S et 0 sinon.
On note $S(G)$ l'ensemble des vecteurs caractéristiques des stables de G et

$P(G)$=Conv$S(G)$.
Soit le polyèdre $Q(G)$ défini par le système d'inégalités suivant:

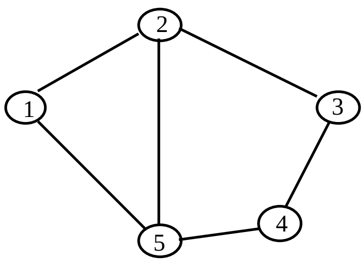
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 \le 1 & (1) \\ x_1 + x_3 + x_6 \le 1 & (2) \\ x_1 + x_4 + x_6 \le 1 & (3) \\ x_2 + x_4 + x_6 \le 1 & (4) \\ x_2 + x_4 + x_7 \le 1 & (5) \\ x_2 + x_5 + x_7 \le 1 & (6) \\ x_3 + x_5 + x_7 \le 1 & (7) \\ x_i \ge 0 \quad i = 1, \ldots, 7 \end{cases}$$

On a $P(G) \subset Q(G)$.

1) Montrer que le point x^* de coordonnées $x_i^* = \frac{1}{3}$ pour tout $i = 1, \ldots, 7$ est un point extrême de $Q(G)$.
2) Montrer de façon algébrique que l'inégalité $\sum_{i=1,\ldots,7} x_i \le 2$ est vérifiée par tout $x \in S(G)$.
3) Soit F la face de $P(G)$ induite par $\sum_{i=1,\ldots,7} x_i \le 2$ i.e. $F = P(G) \cap \left\{x : \sum_{i=1,\ldots,7} x_i = 2\right\}$.
Montrer que F est une facette de $P(G)$.
En utilisant le résultat du I, montrer que F est un simplexe (c'est-à-dire l'enveloppe convexe de points affinement indépendants).
4) Soit G la face de $P(G)$ définie par $G = F \cap \{x : x_2 + x_4 + x_6 = 1\}$. Montrer que G est une facette de F.

Polytope des sous-graphes bipartis d'un graphe

$G=(V,E)$ désigne un graphe non orienté, V ses sommets et E ses arêtes.
Etant donné W inclus dans V, le sous-graphe de G induit par W est le graphe (W,E(W)) où E(W) est l'ensemble des arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans W.
Le vecteur caractéristique x^W de W inclus dans V est le vecteur de $|V|$ coordonnées en 0-1 définies par $x_u = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
On définit B(G) l'ensemble des vecteurs caractéristiques des W qui induisent des sous-graphes bipartis de G i.e. $\mathrm{B}(G) = \{x^W : W \subset V,\ (W, \mathrm{E}(W)) \text{ est biparti}\}$.
On rappelle qu'un graphe biparti est un graphe dont les sommets peuvent être partitionnés en 2 stables (éventuellement vides), un stable étant un ensemble de sommets non reliés par une arête. Cela revient à dire qu'un graphe est biparti ssi il peut être colorié avec au plus 2 couleurs.
Exemple: considérons le graphe G suivant



$W=\{1\}$, $W=\{1,2\}$, $W=\{1,2,3\}$, $W=\{2,3,4,5\}$ induisent des sous-graphes bipartis de G. $W=\{1,2,5\}$ n'induit pas un sous-graphe biparti de G.

On note P(G) le polytope défini par l'enveloppe convexe de B(G). On peut vérifier facilement que ce polytope est de dimension pleine c'est-à-dire $|V|$.

Un cycle de G est une séquence d'arêtes e_1, e_2,..., e_k t.q. $e_1=\{u_1,u_2\}$, $e_2=\{u_2,u_3\}$,..., $e_k=\{u_k,u_1\}$ où $u_1,u_2,u_3,...,u_k$ sont les sommets aux extrémités des arêtes.

On considère l'inégalité suivante $\sum_{i=1}^{k} x_{u_i} \leq k-1$ pour k impair. On l'appellera inégalité de cycle impair.

1) Etude de l'inégalité de cycle impair.

a) Montrer que l'inégalité de cycle impair est valide pour B(G).

b) Soit C le graphe de sommets $u_1,u_2,u_3,...,u_k$ supposés maintenant tous distincts et ayant pour uniques arêtes $e_1=\{u_1,u_2\}$, $e_2=\{u_2,u_3\}$,..., $e_k=\{u_k,u_1\}$ où k est impair. C est donc un cycle élémentaire (sommets distincts) de longueur impair.
Montrer alors que l'inégalité de cycle impair induit une facette de P(C). (On exhibera k points de B(C) affinement indépendants et appartenant à la face induite c'est-à-dire vérifiant l'inégalité avec égalité).

c) On appelle corde une arête entre 2 sommets non consécutifs d'un cycle. Par exemple une arête entre u_2 et u_5 est une corde de C. Montrer que si C contient une corde alors l'inégalité de cycle impair est la somme d'une autre inégalité de cycle impair plus petite (i.e. avec moins de variables) et d'inégalités triviales de la forme $x_{u_i} \leq 1$ pour certains sommets u_i de C.

d) On revient maintenant à P(G). Etant donné x un vecteur de R^V, de coordonnées comprises dans l'intervalle [0,1], proposer une méthode polynomiale en $O\left(|V|^3\right)$ pour trouver une inégalité de cycle impair violée par x.
A.N. Considérons le graphe de la figure ci-dessus. Supposons $x_1=1,\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=\frac{7}{8},\ x_4=1,\ x_5=\frac{3}{4}$. Donner 2 inégalités de cycles impairs violées par ce point, en appliquant la méthode précédente.

2) Lifting et applications.

Soit une inégalité $ax\leq\alpha$ qui induit une face de P(G). Soit le graphe G^+ obtenu en rajoutant à G un sommet universel u_0 c'est-à-dire relié à tous les sommets de G.
Soit $\delta = \max\left\{ax^S : x^S \text{ est le vecteur caractéristique d'un stable } S \text{ de } G\right\}$.

a) Montrer que l'inégalité $ax+(\alpha-\delta)x_{u_0} \leq \alpha$ est valide pour B(G^+).

b) Montrer que l'inégalité $ax+(\alpha-\delta)x_{u_0} \le \alpha$ induit une facette de P(G^+) si $ax \le \alpha$ induit une facette de P(G). (On exhibera $|V|+1$ points de B(G^+) affinement indépendants et appartenant à la face induite c'est-à-dire vérifiant l'inégalité avec égalité).

c) D'après le résultat de la question 1)b) on sait que l'inégalité $x_{u_1}+x_{u_2}+x_{u_3} \le 2$ induit une facette de P(K_3) où K_3 est le graphe complet d'ordre 3 construit sur les sommets u_1,u_2,u_3.
Montrer en appliquant récursivement le résultat de la question précédente 2)b), que l'inégalité $\sum_{i=1}^{n} x_{u_i} \le 2$ induit une facette de P(K_n) où K_n est le graphe complet d'ordre n construit sur les sommets $u_1,u_2,u_3,\dots,u_n$ ($n \ge 3$). Cette inégalité est appelée inégalité clique.

d) Soit C le graphe de sommets $u_1,u_2,u_3,\dots,u_k$ tous distincts et ayant pour uniques arêtes $e_1=\{u_1,u_2\}$, $e_2=\{u_2,u_3\}$,..., $e_k=\{u_k,u_1\}$ où k est impair. C est donc un cycle élémentaire de longueur impair.
D'après la question 1)b) on sait que l'inégalité $\sum_{i=1}^{k} x_{u_i} \le k-1$ induit une facette de P(C).
Soit le graphe C^+ obtenu en rajoutant à C le sommet universel u_0. On peut voir C^+ comme une roue de centre u_0 avec k rayons.
Montrer en appliquant le résultat de la question 2)b), que l'inégalité $\sum_{i=1}^{k} x_{u_i} + \frac{k-1}{2} x_{u_0} \le k-1$ induit une facette de P(C^+). Cette inégalité est appelée inégalité de roue impaire.

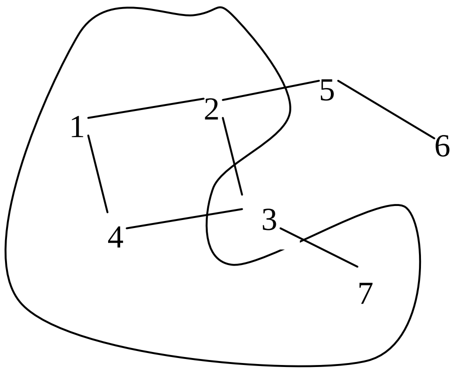
<u>Polytope des coupes d'un graphe</u>

Soit un graphe $G=(V,E)$ avec V l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes de G. $e=(i,j)$ désignera une arête e ayant pour extrémités les sommets i et j. Pour $U \subset V$, on désigne par $\delta(U)$ l'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans U et l'autre extrémité dans $V \backslash U$. Par définition, $\delta(U)$ est une coupe de G.
Pour $E' \subset E$, le vecteur caractéristique de E' est le vecteur x, indexé par les arêtes de G, et défini par:

$$x_e = \begin{cases} 1 \text{ si } e \in E' \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note Q(G) l'ensemble des vecteurs caractéristiques des coupes de G et P(G)=Conv(Q(G)) l'enveloppe convexe de Q(G).

Exemple :



U={1,2,4,7}, $\delta(U)$={(2,5),(2,3),(3,4),(3,7)}. Le vecteur caractéristique de cette coupe est :

$$x = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{14} \\ x_{23} \\ x_{25} \\ x_{34} \\ x_{37} \\ x_{56} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Noter qu'une coupe peut être éventuellement vide : prendre par exemple $U=\emptyset$.

1) Dimension de P(G).

Soit

$$f(x) = a_0 + \sum_{(i,j)\in E} a_{ij} x_{ij} = 0$$

l'équation d'un hyperplan contenant P(G) (avec a_0, $a_{ij} \in \mathbb{R}$). Montrer que :

$$a_0 = 0$$
$$a_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in E$$

Pour cela, on considèrera les vecteurs caractéristiques des 4 coupes définies par :
$U=\emptyset$, $U=\{i\}$, $U=\{j\}$, $U=\{i,j\}$.
En déduire la dimension de P(G).

2) Inégalités valides.

Un cycle de G est une suite d'arêtes de la forme $(i_1,i_2),(i_2,i_3),\ldots,(i_k,i_1)$ où $i_1,i_2,i_3,\ldots,i_k$ sont des sommets tous distincts. Une corde est une arête entre 2 sommets non consécutifs du cycle.
Soit un cycle C de G et $(i,j)\in C$. On considère l'inégalité:

$$I_0 \quad \equiv \quad x_{ij} \le \sum_{e \in C-(i,j)} x_e$$

a) Montrer que l'inégalité I_0 est valide pour P(G) c'est-à-dire vérifiée par tous les points de Q(G).
Montrer que si C contient une corde, alors l'inégalité I_0 peut se déduire de la somme de 2 inégalités du même type.
b) Soit maintenant (i_1,j_1), (i_2,j_2),(i_3,j_3) 3 arêtes de C. On considère l'inégalité:

$$I_1 \quad \equiv \quad -2 + x_{i_1 j_1} + x_{i_2 j_2} + x_{i_3 j_3} \le \sum_{e \in C-\{(i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\}} x_e$$

Montrer que l'inégalité I_1 est valide pour P(G) c'est-à-dire vérifiée par tous les points de Q(G).
c) Proposer une inégalité valide généralisant ces deux inégalités I_0 et I_1.

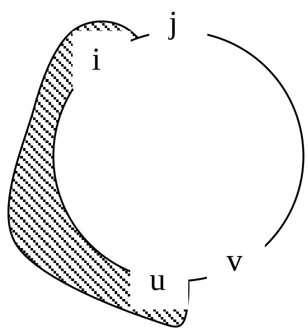
3) Facette.
On considère ici un graphe G constitué d'un seul cycle C (sans corde) avec au moins 3 sommets. On considère l'inégalité I_0 définie avec (i,j) une arête quelconque du cycle.
Soit F la face de P(G) induite par I_0 c'est-à-dire :

$$F = \left\{ x \in P(G) : x_{ij} = \sum_{e \in C-(i,j)} x_e \right\}$$

Soit

$$f(x) = a_0 + \sum_{e \in C} a_e x_e = 0$$

l'équation d'un hyperplan contenant F (avec a_0, $a_e \in \mathbb{R}$).
On note $\{i\text{-}u\}$ l'ensemble des sommets du cycle rencontrés en parcourant le chemin allant du sommet i au sommet u (inclus) et ne passant pas par j (zone grisée dans le shéma ci-dessous).



On considère les coupes définies par les ensembles U suivants :
$U=\emptyset$, $U=\{i\text{-}u\}$pour tout $u \neq j$.

Montrer que les vecteurs caractéristiques de ces coupes appartiennent à F.
Ecrire l'équation que vérifie chacun de ces vecteurs caractéristiques et en déduire qu'il existe un réel α t.q.

$a_0 = 0$
$a_{ij} = -\alpha$
$a_e = \alpha \quad \forall e \in C - (i, j)$

En déduire que F est une facette de P(G).

Facettes de l'hypersimplex polytope.

On considère le polytope $\Delta_{d,k} = \mathrm{Conv}\left\{x \in \{0,1\}^d : \sum_{i=1,\ldots,d} x_i = k\right\}$ avec $1 \le k \le d-1$ entier.

La dimension de $\Delta_{d,k}$ est $d-1$ et $\mathrm{Aff}\Delta_{d,k} = \left\{x : \sum_{i=1,\ldots,d} x_i = k\right\}$.

On note $B_{d,k} = \left\{x \in \{0,1\}^d : \sum_{i=1,\ldots,d} x_i = k\right\}$ avec $1 \le k \le d-1$ entier.

1) Montrer que l'inégalité valide $x_1 \ge 0$ induit une facette de $\Delta_{d,k}$ pour $1 \le k \le d-2$.
2) Montrer que l'inégalité valide $x_1 \le 1$ induit une facette de $\Delta_{d,k}$ pour $2 \le k \le d-1$.
3) Qu'en est-il pour l'inégalité $x_1 \ge 0$ lorsque $1 \le k = d-1$ et l'inégalité $x_1 \le 1$ lorsque $1 = k \le d-1$?
4) On note $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ la bijection affine définie par : $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x_1 \\ \vdots \\ 1-x_d \end{pmatrix}$.

Montrer que $\varphi(\Delta_{d,k}) = \Delta_{d,d-k}$. Retrouver, en utilisant φ, la symétrie des conditions sur les facettes induites par $x_1 \ge 0$ et $x_1 \le 1$.
5) Soit $P \subset \mathbb{R}^d$ le polyèdre défini par $P = \left\{x \in [0,1]^d : \sum_{i=1,\ldots,d} x_i = k\right\}$.

De façon évidente $B_{d,k} \subset P$ et donc $\mathrm{Conv}B_{d,k} \subset P$ car un polyèdre est convexe. L'objectif ici est de montrer l'inclusion inverse $\mathrm{Conv}B_{d,k} \supset P$ et finalement $\mathrm{Conv}B_{d,k} = P$.
Pour $x \in [0,1]^d$, on note n(x) le nombre de variables fractionnaires de x c'est-à-dire le cardinal de l'ensemble $\{i=1,\ldots,d : 0 < x_i < 1\}$.

Par exemple, $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ n(x)=3.

Montrer par récurrence sur l'entier p que $P \cap \left\{x \in [0,1]^d : \mathrm{n}(x) \le p\right\} \subset \mathrm{Conv}B_{d,k}$ avec $0 \le p \le d$. Comme $P \cap \left\{x \in [0,1]^d : \mathrm{n}(x) \le d\right\} = P$, on aura démontré $P \subset \mathrm{Conv}B_{d,k}$.

Inégalités d'élimination de sous-tours pour le polytope des cycles hamiltoniens

On poursuit ici l'exercice intitulé "Enveloppe affine du polytope des cycles hamiltoniens".

On propose d'étudier l'inégalité (I) suivante:

$$g_w(x) = \sum_{e \in E(W)} x_e - (|W| - 1) \le 0 \qquad \text{(I)}$$

où W est un sous-ensemble propre des sommets de K_n $(1 \le |W| \le n-1)$ et E(W) désigne l'ensemble des arêtes de K_n ayant leurs 2 extrémités dans W.

On note P(n) le polytope défini par l'enveloppe convexe de T(n), l'ensemble des vecteurs caractéristiques de cycles hamiltoniens de K_n (le graphe complet d'ordre n).
On rappelle que l'enveloppe affine de P(n) est décrite par l'ensemble $\left\{ x\colon f_i(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_{ij} - 2 = 0 \ \ (i = 1,\ldots,n) \right\}$

1) On s'intéresse à la validité de l'inégalité (I).
a) Montrer que tout x^T appartenant à T(n) vérifie (I). A quelle condition (I) est-elle saturée (i.e. vérifiée avec égalité) par x^T ?
En déduire que (I) est valide pour P(n) c'est-à-dire vérifiée par tous les points de P(n).
b) On appelle sous-tour, un ensemble de plusieurs cycles disjoints qui passent par tous les sommets. Remarquer que l'enveloppe affine de T(n) contient l'ensemble des vecteurs caractéristiques des sous-tours de K_n.
Montrer que pour tout vecteur caractéristique d'un sous-tour il existe une inégalité (I) violée par ce vecteur.
2) On va montrer que pour $2 \le |W| \le n-3$ (I) induit une facette de P(n).
On note F la face de P(n) induite par (I) c'est-à-dire $F = \{x\colon g_w(x) = 0\} \cap \mathrm{P}(n)$.
Soit $f(x) = \sum_{e\in E} a_e x_e + a_0$ t.q. l'hyperplan $f^{-1}(0)$ contient F. En particulier on a $f(x^T) = 0 \ \ \forall x^T \in \{x\colon g_w(x) = 0\} \cap \mathrm{T}(n)$
Sans perte de généralité supposons $W = \{u, v, \ldots\}$ (u,v fixés) et $\overline{W}$ = N \ $W = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ définis comme solution du système (inversible) $\begin{cases} a_{12} = \lambda_1 + \lambda_2 \\ a_{13} = \lambda_1 + \lambda_3 \\ a_{23} = \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$ et pour $4 \le i \le n$ λ_i défini par l'équation $a_{1i} = \lambda_1 + \lambda_i$ et finalement μ défini par $a_{uv} = \lambda_u + \lambda_v + \mu$.

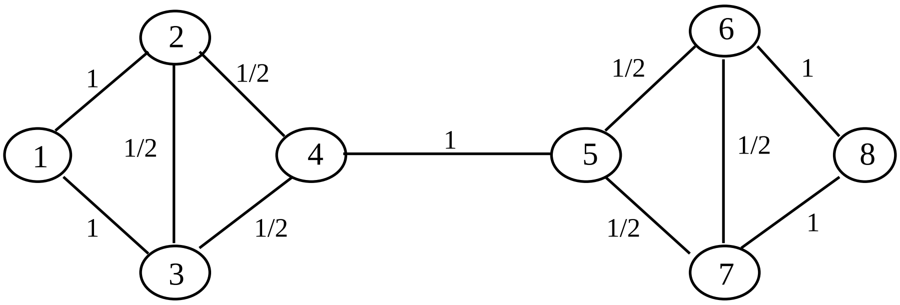
Montrer que $a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i + \lambda_j & \text{si } \{i, j\} \notin E(W) \\ \lambda_i + \lambda_j + \mu & \text{si } \{i, j\} \in E(W) \end{cases}$ et que $a_0 = -2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \mu(|W| - 1)$.

En déduire que $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i + \mu g_w$.

3) On s'intéresse ici aux cas où le cardinal de W n'est pas dans l'intervalle de la question 2.
Soit x^T appartenant à T(n). Montrer que pour $\overline{W}$ = N \ $W = \{u, v\}$, (I) est saturée par x^T ssi $x_{uv} - 1 \le 0$ est saturée par x^T.
Montrer que lorsque $\overline{W}$ est un singleton, tous les points de T(n) saturent (I). Peut-on dans ce cas exprimer g_w comme combinaison linéaire des f_i ?

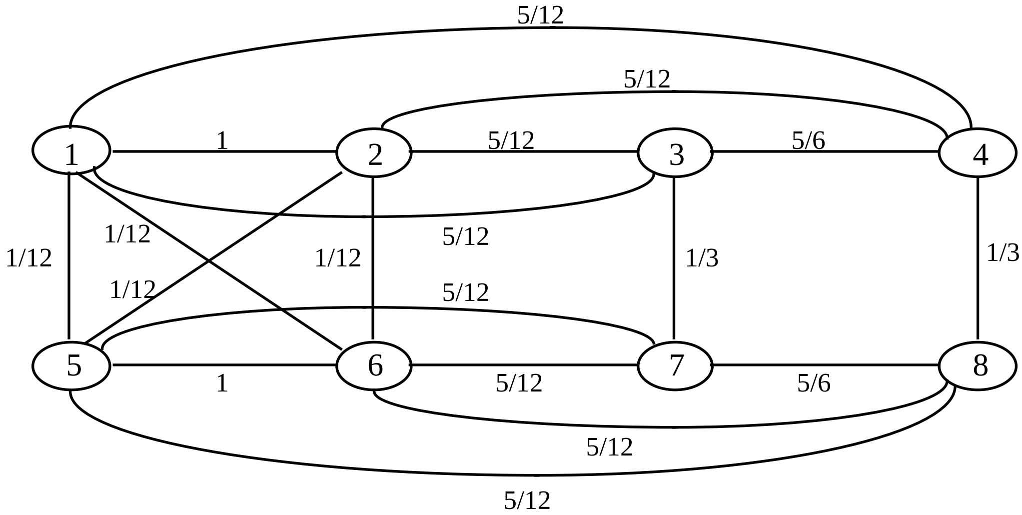
Séparation des inégalités d'élimination de sous-tours du polytope des cycles hamiltoniens

On se propose ici d'étudier le problème de séparation des inégalités d'élimination de sous-tours présentées dans l'exercice "Inégalités d'élimination de sous-tours pour le polytope des cycles hamiltoniens".
On rappelle que P(n) désigne le polytope des cycles hamiltoniens c'est-à-dire l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des cycles hamiltoniens de K_n , le graphe complet d'ordre n .
On rappelle que l'inégalité d'élimination de sous-tours s'écrit $\sum_{e \in E(W)} x_e \leq (|W|-1)$ où W est un sous-ensemble propre des sommets de K_n $(1 \leq |W| \leq n-1)$ et E(W) désigne l'ensemble des arêtes de K_n ayant leurs 2 extrémités dans W.
On rappelle que l'enveloppe affine de P(n) est décrite par l'ensemble $\left\{ x\colon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_{ij} = 2 \ \ (i = 1, \dots, n) \right\}$
1) Montrer que si x appartient à l'enveloppe affine de P(n) alors l'inégalité d'élimination de sous-tours peut s'écrire $\sum_{e \in \delta(W)} x_e \geq 2$ où $\delta(W)$ désigne l'ensemble des arêtes de K_n ayant une et une seule extrémité dans W. $\delta(W)$ est ce qu'on appelle une coupe ou un cocycle de K_n .
En déduire que la recherche d'une inégalité d'élimination de sous-tours violée par x revient à la recherche d'une coupe de capacité minimum. On définira les capacités en question.
2) On considère maintenant un point x de l'enveloppe affine de P(n) dont toutes les coordonnées sont ≥ 0.
Montrer que si une arête e est t.q. $x_e \geq 1$ alors à partir de toute coupe optimale, solution du problème de séparation posé en 1), on peut contruire une coupe optimale ne contenant pas e .
En déduire une réduction de la taille du graphe dans lequel on recherche la coupe de capacité minimum qui n'altère en rien la recherche d'inégalités violées.
En utilisant ce résultat, trouver une inégalité d'élimination de sous-tours violée dans le cas suivant:



où les valeurs indiquées sur les arêtes correspondent aux coordonnées du point x (une arête absente correspondant à une valeur nulle de la coordonnée).
3) On note n' le nombre de sommets du graphe réduit selon la méthode de la question 2) $(n' \leq n)$. Montrer que la recherche d'inégalités d'élimination de sous-tours violées peut être résolue par $\frac{1}{2} n'(n'-1)$ applications d'un algorithme flot max-coupe min

comme celui de Ford-Fulkerson. A titre d'exemple, chercher les coupes de capacité minimum séparant 1 et 5 puis 1 et 4 dans le cas suivant:



où les valeurs indiquées sur les arêtes correspondent aux coordonnées du point x (une arête absente correspondant à une valeur nulle de la coordonnée).
Montrer qu'en fait on peut se limiter à $n'-1$ applications de l'algorithme de flot maximum.

Inégalité de couverture pour le problème du sac-à-dos en 0-1

Soit N un ensemble d'objets. Pour i appartenant à N soient a_i et c_i deux entiers>0 représentant respectivement le poids et la valeur de l'objet i. Soit b un entier t.q. $a_i \leq b$ pour tout i appartenant à N .
Le problème posé est comment choisir des objets dans N de façon à maximiser la valeur totale des objets choisis mais sans que la somme des poids des objets choisis ne dépasse b.
Ce problème se modélise de la façon suivante:

$$\max \sum_{i \in N} c_i x_i \text{ s.c. } \begin{cases} \sum_{i \in N} a_i x_i \leq b \quad (\text{sac} - \text{à} - \text{dos}) \\ x_i \in \{0,1\} \quad (i \in N) \end{cases}$$

$$\text{avec } x_i = \begin{cases} 1 \text{ si l'objet } i \text{ est choisi} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note S l'ensemble des vecteurs x satisfaisant les contraintes du problème et P=Conv$S$.

Soit C inclu dans N. On dit que C est une couverture si $\sum_{i \in C} a_i > b$.
Si C est une couverture alors l'inégalité $\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$ est valide pour S (et donc P) puisqu'un vecteur t.q. $x_i = 1 \ \forall i \in C$ n'est pas dans S. Cette inégalité est appelée inégalité de couverture.
On dit que C est une couverture minimale si C est une couverture et C-$\{i\}$ ne l'est pas pour tout i de C.

1) Donner la dimension de P.

2) Notons $i_{\max}$ l'objet de poids maximum dans C et $j_{\max}$ l'objet de poids maximum dans N-C . Montrer que si C est une couverture minimale et si C-$\{i_{\max}\}$+$\{j_{\max}\}$ n'est pas une couverture alors l'inégalité de couverture induit une facette de P.
3) Soit x^* un vecteur de $[0,1]^{|N|}$. Montrer que la recherche d'une inégalité de couvertue violée par x^* revient à résoudre le problème suivant:

$$\min_z \sum_{i\in N}\left(1-x_i^*\right)z_i \text{ s.c. } \begin{cases}\sum_{i\in N} a_i z_i \geq b+1 \\ z_i \in \{0,1\} \ (i\in N)\end{cases}$$

avec $z_i = \begin{cases}1 \text{ si } i \in C \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

4) On considère maintenant le problème défini par le tableau suivant:

objets	1	2	3	4	5
valeurs	6	4	3	1	1
poids	3	2	2	1	1
b	6				

Soit $x^* = \left(1,1,\frac{1}{2},0,0\right)$ la solution du problème relaché dans lequel les conditions d'intégrité sur les variables x_i sont relachées à $x_i \in [0,1]$.
Chercher l'inégalité de couverture la plus violée par x^*, la rajouter au problème relaché et résoudre le nouveau problème obtenu.
5) Si $a_{j_{\max}} \geq a_{i_{\max}}$ alors C-$\{i_{\max}\}$+$\{j_{\max}\}$ est toujours une couverture et on ne peut pas appliquer le résultat de la question 2.
Proposer dans ce cas une amélioration de l'inégalité de couverture en considérant l'ensemble $C^+ = \left\{j \in N-C:\ a_j \geq a_{i_{\max}}\right\}$ et donner les conditions sous lesquelles cette nouvelle inégalité induit une facette de P. Vérifier que ces conditions sont plus faibles que celles demandées à la question 2.
6) Proposer des inégalités linéaires ou affines, valides pour les points de S, obtenues en multipliant:
- l'inégalité (sac-à-dos) par la variable x_3,
- l'inégalité $x_3 \leq 1$ par $1-x_1$ et $1-x_2$.

On introduira pour cela des variables y_{ij} afin de modéliser les produits $x_i x_j$ et on prendra en compte le caractère 0-1 des variables à savoir que $x_i = x_i^2$.
En considérant la projection, sur les variables x, du polyèdre ainsi obtenu, proposer alors une inégalité valide violée par le point x^*.

Un problème de déménagement

On doit, lors d'un déménagement, mettre des produits dangereux dans un caisson. Chaque produit i a une valeur c_i . On désire remplir le caisson de façon à obtenir une somme des valeurs des produits transportés maximum. Le caisson est assez grand pour emporter tous les produits. Cependant en raison de la dangerosité des produits, des contraintes d'exclusion mutuelles interdisent de mettre certains produits ensemble. Il y a 5 produits numérotés de 1 à 5 et les relations d'exclusion mutuelles sont :

produit	produit	exclusion mutuelle
1	2	oui
1	3	oui
1	4	non
1	5	oui
2	3	oui
2	4	non
2	5	non
3	4	oui
3	5	non
4	5	non

On peut modéliser ce problème de déménagement par le programme mathématique en variables binaires 0-1 suivant :

$$(\mathrm{P}_{\text{déménagement}}) \quad \max \sum\nolimits_{i=1,\ldots,5} c_i x_i \quad \text{sous les contraintes} \begin{cases} x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ x_1 & +x_3 & \leq 1 \\ x_1 & +x_5 & \leq 1 \\ x_2 & +x_3 & \leq 1 \\ x_3 & +x_4 & \leq 1 \\ x_i & \in \{0,1\} & i=1,\ldots,5 \end{cases}$$

x_i=1 signifie : on met le produit *i* dans le caisson
x_i=0 signifie : on ne met pas le produit *i* dans le caisson

On note *X* l'ensemble des vecteurs 0-1 réalisables c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs satisfaisant les contraintes du problème ($\mathrm{P}_{\text{déménagement}}$). Pour des raisons de commodité, on écrit ces vecteurs *x* sous forme de vecteur ligne, les variables allant de 1 à 5 de la gauche vers la droite $x = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5)$.

I) Prise en main du problème.

1) Les vecteurs suivants sont-ils dans *X* ? A quelle contenu du caisson correspondent-ils ?
$(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$
$(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$
$(1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$
$(0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$
$(1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$

2) Dessiner le graphe des exclusions mutuelles où les sommets sont les produits et les arêtes représentent les exclusions mutuelles.
A quel ensemble particulier de sommets correspond chaque vecteur de *X*?

II) Dimension de l'enveloppe convexe des solutions réalisables.

On note *P*=Conv*X* , l'enveloppe convexe de *X*.
Soit *H* un hyperplan d'équation $\sum_{i=1,\ldots,5} a_i x_i = a_0$ contenant *P* et donc *X*.

1) A l'aide de vecteurs de X convenablement choisis, montrer que nécessairement $a_0=a_1=\ldots=a_5=0$.

2) Que peut-on en déduire concernant la dimension de P ?

III) Inégalité valide.

1) A l'aide du graphe des exclusions mutuelles et en quelques mots, montrer que l'inégalité $x_1+x_2+x_3\leq 1$ est valide pour X c'est-à-dire satisfaite par les vecteurs de X.

2) En ajoutant 3 inégalités extraites des contraintes de ($P_{\text{déménagement}}$), et en considérant les deux membres de l'inégalité obtenue, retrouver le fait que l'inégalité $x_1+x_2+x_3\leq 1$ est valide pour X.

IV) Facette de l'enveloppe convexe des solutions réalisables.

On s'intéresse maintenant aux vecteurs de X qui satisfont l'inégalité $x_1+x_2+x_3\leq 1$ avec <u>égalité</u> et on définit $Y=X\cap\{x : x_1+x_2+x_3=1\}$. On note $F=\text{Conv}Y$, l'enveloppe convexe de Y.

1) Les vecteurs suivants sont-ils dans Y ?

$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

2) Soit H un hyperplan d'équation $\sum_{i=1,\ldots,5} a_i x_i = a_0$ contenant F et donc Y.

A l'aide de vecteurs de Y convenablement choisis, montrer que nécessairement $a_0=a_1=a_2=a_3$ et $a_4=a_5=0$.

3) A l'aide de cette expression particulière de l'équation de l'hyperplan H, en déduire la dimension de F .

<u>Projection d'un polyèdre</u>

Soit le polyèdre de $\mathbb{R}^2$ défini par $\begin{cases} x-y\geq -2 \\ x+y\leq 3 \\ x-y\leq -1 \\ y\geq 0 \end{cases}$.

Donner la projection de P sur l'espace de la variable x. (On utilisera le théorème de Farkas et les points extrêmes d'un polyèdre convenablement choisi).

Elimination de Fourier-Motzkin

Soit P le polyèdre de $\mathbb{R}^{d+1}$ défini par l'ensemble des points $(x,y)\in\mathbb{R}^{d+1}$ satisfaisant :

$$\begin{cases} a^l x + y \le \alpha^l & l \in L \\ b^k x - y \le \beta^k & k \in K \\ c^i x \le \gamma^i & i \in I \end{cases}$$

avec a^l, b^k, c^i vecteurs lignes constitués de d colonnes, α^l, β^k, γ^i scalaires.

La projection de P sur x est l'ensemble de $\mathbb{R}^d$ défini par $P_x=\{x : \exists y \text{ tel que } (x,y)\in P\}$.

1) Montrer que P_x est l'ensemble des x satisfaisant :

$$\begin{cases} b^k x - \beta^k \le \alpha^l - a^l x & k \in K, l \in L \\ c^i x \le \gamma^i & i \in I \end{cases}$$

2) Trouver la projection sur x du polyèdre de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\begin{cases} x - y \ge -2 \\ x + y \le 3 \\ x - y \le -1 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Illustration du théorème de Weyl sur le quadric polytope

Soit $Q_n = \{(x,y) : x_i \in \{0,1\}\ (1 \le i \le n), y_{ij} = x_i x_j\ (1 \le i < j \le n)\}$. Les points de Q_n sont des vecteurs de $n + {}^1/_2 n(n-1)$ coordonnées. Le nombre d'éléments de Q_n est 2^n.

Le quadric polytope (d'ordre n) est $P_n=\text{Conv}Q_n$ soit écrit sous forme extensive

$$P_n = \left\{ \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_{2^n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_i \ge 0 \ \left(i = 0,\ldots,2^n-1\right), \sum_{i=0,\ldots,2^n-1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Le but de cet exercice est de donner la description de P_n sous la forme d'un polyèdre en les variables x_i (i=1 à n), y_{ij} ($1\le i<j\le n$) pour n=2 et n=3.

1) Cas n=2. A partir d'une combinaison convexe de P_2, exprimer λ_i (i=0 à 3) en fonction des variables x_1, x_2, y_{12}. En déduire le polyèdre en les variables x_1, x_2, y_{12} décrivant P_2.

2) Cas n=3. A partir d'une combinaison convexe de P_3, exprimer λ_i (i=0 à 6) en fonction de λ_7 et des variables x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23}. En déduire le polyèdre en les variables λ_7 et x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23} décrivant P_3.

Eliminer λ_7 par la méthode de Fourier-Motzkin (cf. exercice précédent) et en déduire le polyèdre en les variables x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23} décrivant P_3.

Polaire d'un polytope

Soit $p_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $p_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $P = Conv\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

On dit que l'inégalité $ax \le b$ est valide pour P si elle est satisfaite par tous les points de P (où $ax = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$).

Si $ax \le b$ est une inégalité valide pour P alors $P \cap \{x : ax = b\}$ est une face de P appelée face induite par l'inégalité $ax \le b$.

Une facette de P est une face de P de dimension dim$P$-1 (c'est-à-dire contenant dim$P$ points de P affinement indépendants).

1) Montrer que $\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ est une famille de points affinement indépendants. En déduire dim$P$.

2) Montrer que **0**, le vecteur nul, est combinaison convexe stricte (c'est-à-dire avec des coefficients strictement positifs) des points de $\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

En déduire que si $ax \le b$ est une inégalité valide pour P alors $b \ge 0$ et $b = 0 \Rightarrow a = \mathbf{0}$.

3) On considère maintenant les inégalités valides pour P non identiquement nulles (c'est-à-dire t.q. $b \neq 0$).

a) Montrer que de telles inégalités peuvent s'écrire $ax \le 1$.

Soit le polyèdre $Q = \left\{ a : \begin{array}{rrrrl} -2a_1 & -2a_2 & -a_3 & -a_4 & \le 1 \\ 3a_1 & -2a_2 & -a_3 & -a_4 & \le 1 \\ -2a_1 & +3a_2 & -a_3 & -a_4 & \le 1 \\ -2a_1 & -2a_2 & +4a_3 & -a_4 & \le 1 \\ 3a_1 & +3a_2 & -a_3 & +4a_4 & \le 1 \end{array} \right\}$

b) Si $ax \le 1$ est une inégalité valide pour P, montrer que $a \in Q$.

c) Réciproquement, si $a \in Q$ montrer que $ax \le 1$ est une inégalité valide pour P.

d) Montrer que (1 1 1 -1) est un point extrême de Q.

En déduire que l'inégalité $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 1$ induit une facette de P.

4) On considère le polytope $P' = u + P$ (le translaté de P par u) avec $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $P' = Conv\{p'_0, p'_1, p'_2, p'_3, p'_4\}$ avec $p'_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $p'_1 = \begin{pmatrix}5\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $p'_2 = \begin{pmatrix}0\\5\\0\\0\end{pmatrix}$, $p'_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\5\\0\end{pmatrix}$, $p'_4 = \begin{pmatrix}5\\5\\0\\5\end{pmatrix}$.

b) Montrer que le translaté de la facette de *P* induite par l'inégalité $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 1$ est la facette de *P'* induite par l'inégalité $x'_1 + x'_2 + x'_3 - x'_4 \leq 5$.

<u>Lifting et polarité</u>

Etant donné un graphe G de n sommets, un stable de G est un ensemble de sommets de G non reliés 2 à 2 par une arête. L'ensemble vide est considéré comme un stable. On note S(G) l'ensemble des stables de G. Soit s appartenant à S(G) on définit x^s le vecteur caractéristique de s par $x_i^s = \begin{cases} 1 \text{ si le sommet } i \in s \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

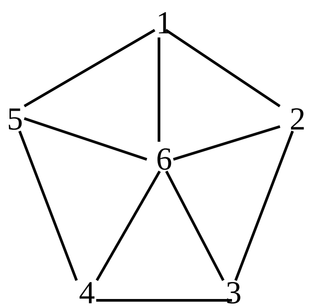
On note Q(G) l'ensemble des vecteurs caractéristiques des stables de G et P(G) l'enveloppe convexe de Q(G). On admettra que P(G) est de dimension pleine c'est-à-dire n.

Une inégalité $px \leq \beta$ est valide pour Q(G) si elle est vérifiée par tout vecteur x de Q(G). Une inégalité valide pour Q(G) l'est aussi pour P(G) c'est-à-dire vérifiée par tout vecteur x de P(G).

La face de P(G) induite par l'inégalité valide $px \leq \beta$ est l'ensemble des vecteurs x de P(G) qui satisfont $px = \beta$.

Si P(G) est l'enveloppe convexe des vecteurs x^{s0}, x^{s1} ,... x^{sk} alors le 1-polaire de P(G) est le polyèdre $\Pi(G)$ défini par $\Pi(G) = \{p \in R^n : px^{s_0} \leq 1, px^{s_1} \leq 1, \ldots, px^{s_k} \leq 1\}$. On admettra que si p* est un point extrême de $\Pi(G)$ alors l'inégalité $p^*x \leq 1$ induit une facette de P(G) et réciproquement.

Maintenant nous considérons le graphe G suivant:



On note G-{6} le graphe induit par le retrait du sommet 6 c'est-à-dire le cycle impair défini sur les sommets 1, 2, ..., 5. On admet (et on vérifie facilement) que l'inégalité $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$ est valide pour Q(G-{6}).

1) Le coefficient α maximum t.q. l'inégalité $\alpha x_6 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$ soit valide pour Q(G) est donné par $\alpha_{max} = 2 - \max_{\substack{x \in Q(G) \\ \text{t.q. } x_6 = 1}} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

Justifier cette formule et calculer α_{max} .
2) En admettant que l'inégalité $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$ induise une facette de P(G-{6}) et en utilisant le vecteur réalisant α_{max} dans la question précédente, montrer que l'inégalité $\alpha_{max}x_6 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$ induit une facette de P(G).
3) Donner Π(G) le 1-polaire de P(G).
4) Donner, en le justifiant bien, le point extrême de Π(G) qui correspond à l'inégalité trouvée en 1.
5) Reprendre les questions 1, 2 et 4 pour le cas de l'inégalité $x_1 + x_2 \leq 1$ qui induit une facette de P(G-{6}).

Méthode de décomposition pour le problème du stable de poids maximum

On considère le problème du stable de cardinal maximum sur le graphe constitué d'un cycle impair de 7 sommets.
On formule le problème de la façon suivante:

$$\max_{x,y} x_1 + x_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_7$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 + y_3 \leq 1 \\ x_1 + y_7 \leq 1 \\ y_3 + y_4 \leq 1 \\ y_4 + y_5 \leq 1 \\ y_5 + y_6 \leq 1 \\ y_6 + y_7 \leq 1 \\ x_1, x_2 \in \{0,1\},\ \ y_3,\ldots,y_7 \geq 0 \end{cases}$$

Appliquer la méthode de décomposition à ce problème.

Méthode de génération de colonnes pour le problème du stable de poids maximum

Postulat: on considère que calculer un stable de poids maximum dans un graphe ayant un nombre de sommets ≤3 peut se faire par énumération en un temps acceptable.

Maintenant on considère le problème du stable de poids maximum sur le graphe *G* constitué d'un cycle impair de 5 sommets. Les sommets sont numérotés de 1 à 5 et sont munis de poids tous égaux à 1.

Tenant compte du postulat, on décompose *G* en 2 sous-graphes de 3 et 2 sommets, le premier formé des sommets 1, 2, 3 et le second des sommets 4, 5. Cela revient à retirer de *G* les arêtes (1,5) et (3,4). Notons *G'* le graphe ainsi obtenu.
Calculer un stable de poids maximum dans *G'* est facile compte-tenu du postulat puisqu'il suffit de calculer 2 stables de poids maximum dans 2 sous-graphes dont le nombre de sommets chacun est ≤3.

On note X l'ensemble des vecteurs caractéristiques des stables de G' et on réécrit le problème du stable de poids maximum dans G de la façon suivante:

$$\max_x x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in X \\ x_1 + x_5 \leq 1 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \end{cases}$$

1) Résoudre par la méthode de génération de colonnes la relaxation de ce problème dans laquelle $x \in X$ est remplacé par $x \in \mathrm{Conv}X$.

2) Soit x* la solution précédente, trouver une inégalité valide pour le problème du stable sur G et violée par x*, l'ajouter au problème relaché précédent (question 1) et réappliquer la méthode de génération de colonnes.