Méthodes Polyédriques - Option Optimisation
A. Faye – 9 Janvier 2013

Durée 1h. Documents autorisés. Calculettes interdites.

Rappel : inégalité de base en variables mixtes.

Soit $X=\{(x,y)\in R^{+}\times Z : y\leq b+x\}$
L'inégalité $y\leq\lfloor b\rfloor+x/(1-f)$ est valide pour X, avec $f=b-\lfloor b\rfloor$ partie fractionnaire de b. C'est l'inégalité de base.

Exercice 1.

Soit l'ensemble X des points (x_1, x_2, y) de variables mixtes définis par :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10y \\ x_1 \leq 14 \\ x_2 \leq 12 \\ y \in Z, x_1 \in R, x_2 \in R \end{cases}$$

1-Montrer que les points de X vérifient :

$$-y \leq \frac{26-x_1-x_2}{10} - \frac{26}{10}$$

2-Peut-on ici appliquer l'inégalité de base (cf. rappel) et pourquoi ?

3-Montrer que $x_1 + x_2 \leq 8 + 6y$ est valide pour X.

Exercice 2.
On doit, lors d'un déménagement, mettre des produits dangereux dans un caisson. Chaque produit i a une valeur c_i . On désire remplir le caisson de façon à obtenir une somme des valeurs des produits transportés maximum. Le caisson est assez grand pour emporter tous les produits. Cependant en raison de la dangerosité des produits, des contraintes d'exclusion mutuelles interdisent de mettre certains produits ensemble. Il y a 7 produits numérotés de 1 à 7 et les relations d'exclusion mutuelles sont indiquées par une croix dans le tableau suivant :

	2	3	4	5	6	7
1	x					x
2		x				
3			x			
4				x		
5					x	
6						x

1-Modélisation du problème.

On introduit 7 variables x_i pour i=1 à 7 (une par produit) prenant des valeurs binaires (valeurs 0 ou 1).
x_i=1 signifie : on met le produit i dans le caisson
x_i=0 signifie : on ne met pas le produit i dans le caisson

Modéliser le problème de déménagement par un programme linéaire en variables binaires avec 7 contraintes.

2-Coupe de Chvatal.

On note X l'ensemble des vecteurs 0-1 réalisables c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs satisfaisant les contraintes du problème.
Montrer à l'aide d'une coupe de Chvatal que l'inégalité $x_1 + x_2 +\ldots+ x_7 \leq 3$ est valide pour X.

3-Facette

On note P=Conv$X$ l'enveloppe convexe de X et F la face de P induite par l'inégalité précédente i.e. $F=P\cap\{x : x_1 + x_2 +\ldots+ x_7 = 3\}$.
Montrer que F est une facette de P.

Corrigé.

Exercice 1.
On part de la première inégalité et on « complémente » x_1 et x_2 par rapport à leur bornes respectives :

$$-10y \leq 14 - x_1 + 12 - x_2 - 14 - 12$$

Ensuite on divise par 10 :

$$-y \leq \frac{26 - x_1 - x_2}{10} - \frac{26}{10}$$

On peut appliquer l'inégalité de base en posant $x = \frac{26 - x_1 - x_2}{10} \geq 0$

La partie fractionnaire de -2,6 est 0,4 .
On applique l'inégalité de base : $-y \leq -3 + \left(\frac{26 - x_1 - x_2}{10}\right) \times \frac{1}{1 - 0,4} \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq 8 + 6y$

Exercice 2.
On peut modéliser ce problème de déménagement par le programme linéaire en variables binaires 0-1 suivant :

$$(P_{\text{déménagement}}) \qquad \max \sum_{i=1,\dots,7} c_i x_i \text{ sous les contraintes } \begin{cases} x_1 & + x_2 & \leq 1 \\ x_2 & + x_3 & \leq 1 \\ x_3 & + x_4 & \leq 1 \\ x_4 & + x_5 & \leq 1 \\ x_5 & + x_6 & \leq 1 \\ x_6 & + x_7 & \leq 1 \\ x_7 & + x_1 & \leq 1 \\ x_i & \in \{0,1\} & i = 1,\dots,7 \end{cases}$$

On note X l'ensemble des vecteurs 0-1 réalisables c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs satisfaisant les contraintes du problème ($P_{\text{déménagement}}$).

On additionne les 7 contraintes de X : $\sum_{i=1}^{7} 2x_i \leq 7$.
Ici, on peut faire deux raisonnements :
raisonnement 1- le nombre à gauche est pair donc il ne peut excéder 6.
raisonnement 2- on divise l'inégalité par 2. Le second membre devient 3,5. Le membre gauche étant un entier on peut arrondir 3,5 à 3 (coupe de Chvatal).

Soit H un hyperplan d'équation $\sum_{i=1,\dots,7} a_i x_i = b$ contenant F.
Les points de F sont donc dans H. Exhibons des points de F :

$$a_1 + a_3 + a_5 = b \ (1)$$
$$a_1 + a_3 + a_7 = b \ (2)$$
$$a_1 + a_4 + a_7 = b \ (3)$$
$$a_2 + a_4 + a_6 = b \ (4)$$
$$a_2 + a_4 + a_7 = b \ (5)$$
$$a_2 + a_5 + a_7 = b \ (6)$$
$$a_3 + a_5 + a_7 = b \ (7)$$

1 et 7$\Rightarrow a_1 = a_7$
3 et 5$\Rightarrow a_1 = a_2$
6 et 7$\Rightarrow a_2 = a_3$
1 et 2$\Rightarrow a_5 = a_7$
4 et 5$\Rightarrow a_6 = a_7$
5 et 6$\Rightarrow a_4 = a_5$
Tous les a_i sont égaux. Posons $\alpha = a_i$ i=1 à 7.
L'équation 1 $\Rightarrow b = 3\alpha$

Donc l'équation de H s'écrit $\alpha \sum_{i=1}^{7} x_i = 3\alpha$. Il n'y a donc qu'un seul hyperplan contenant F. Cela entraine que F est une facette (dim$F$=7-1=6).

<u>Barême</u>

Exercice 1	1) 2pts, 2) 2pts 3) 4 pts
Exercice 2	1) 3 pts 2) 4 pts 3) 5 pts