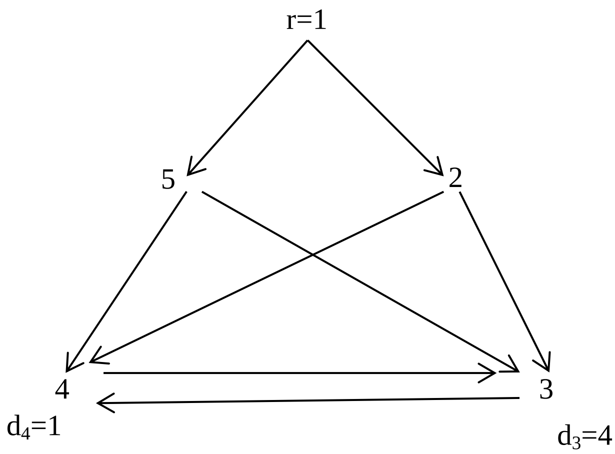
Module RORT. Partie Faye. 6 points. Documents de cours autorisés.

On considère le graphe G orienté suivant :



Le sommet r=1 est la racine qui dessert les clients. L'ensemble des sommets client est D={3,4}. La demande en 3 est d_3=4, la demande en 4 est d_4=1. La capacité des câbles est fonction de l'arc. Les capacités sont données ci-dessous ainsi que les coûts :

arcs	**1,2**	**1,5**	**2,3**	**2,4**	**5,3**	**5,4**	**3,4**	**4,3**
Capacité arc u_{ij}	3	3	5	2	2	1	2	4
Coût arc c_{ij}	5	7	5	2	2	2	3	4

On met au plus un câble par arc. Le problème est de construire le sous-graphe de moindre coût et qui permette l'acheminement des demandes.

1-Ecrire le modèle SCF (Single Commodity Flow) correspondant. On notera x_{ij} les variables (booléennes) de construction d'arcs et f_{ij} les variables (continues) de flot.

2-Soit $S \subset V$ tel que $r \in S$ et $D \not\subset S$. Donner l'inégalité de sac-à-dos (inégalité *coupe*) que doivent satisfaire les variables x_{54}, x_{24}, x_{53}, x_{23}, pour que le problème SCF est une solution (c'est-à-dire pour que l'on puisse acheminer la demande aux clients qui ne sont pas dans S). Préciser l'ensemble S choisi.

3-Pour x fixé, le problème SCF ne comporte plus que les variables de flot. En considérant, le dual du problème pour x fixé, écrire les conditions nécessaires pour qu'il existe un flot réalisable. En prenant une solution particulière, retrouver la contrainte de sac-à-dos de la question précédente.

4-On note RLSCF, la relaxation continue du problème SCF, obtenue en relâchant les conditions d'intégrité des variables x_{ij} . Ecrire le problème RLSCF en fonction des variables de flot uniquement sachant que les variables x_{ij} prennent la plus petite valeur possible (éventuellement fractionnaire).

5-Donner la solution de RLSCF.

6-Trouver une inégalité de couverture de flot au sommet 3, violée par la solution de RLSCF.

Correction

1-Modèle SCF

$$min 5x_{12} + 7x_{15} + 5x_{23} + 2x_{24} + 2x_{53} + 2\, x_{54} + 3x_{34} + 4x_{43}$$

s.c.

$$\begin{cases} -f_{15} - f_{12} = -5 \quad (r = 1) \\ f_{15} - f_{54} - f_{53} = 0 \quad (sommet\ 5) \\ f_{12} - f_{24} - f_{23} = 0 \quad (sommet\ 2) \\ f_{54} + f_{24} - f_{43} = 1 \quad (sommet\ 4) \\ f_{23} + f_{53} - f_{34} = 4 \quad (sommet\ 3) \\ -f_{ij} \geq -u_{ij}x_{ij} \ \ (i,j) \in \{(1,5),(1,2),(5,4),\dots\} \\ f_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

2-Inégalité coupe.

S={r,5,2}.

$$5x_{23} + 2x_{24} + 2x_{53} + x_{54} \geq 5$$

3- x fixé. Le dual s'écrit :

$$max - 5p_1 + p_4 + 4p_3 - \sum_{(i,j)} \alpha_{ij} u_{ij} x_{ij}$$

s.c.

$$\begin{cases} p_j - p_i - \alpha_{ij} \leq 0 \\ \alpha_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (i,j) \in \{(1,5),(1,2),(5,4),\dots\}$$

Si le primal (pour x fixé) a une solution, sa valeur relativement aux flots vaut zéro car les coûts sur les variables de flots sont nuls.

Donc pour toute solution réalisable du dual, l'objectif du dual est négatif ou nul c'est-à-dire :

$$-5p_1 + p_4 + 4p_3 - \sum_{(i,j)} \alpha_{ij} u_{ij} x_{ij} \leq 0$$

s.c.

$$\begin{cases} p_j - p_i - \alpha_{ij} \leq 0 \\ \alpha_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (i,j) \in \{(1,5),(1,2),(5,4),\dots\}$$

On prend $\begin{cases} p_i = 0 \quad \forall i \in S, \\ p_j = 1 \qquad \forall j \in V\backslash S, \\ \alpha_{ij} = 1\ \forall (i,j) i \in S, j \in V\backslash S, \\ \alpha_{ij} = 0\ sinon \end{cases}$

Cette solution satisfait bien les contraintes du dual, et on obtient pour S={r,5,2} :

$$5 - \sum_{(i,j)\in\{(5,4),(5,3),(2,3),(2,4)\}} u_{ij} x_{ij} \leq 0$$

4-Problème RLSCF (relaxation continue de SCF).

Dans toute solution optimale de RLSCF, les variables x_{ij} se déduisent des variables f_{ij} par : $x_{ij}=f_{ij}/u_{ij}$. Les arcs sont alors affectés d'un coût c_{ij}/u_{ij} .

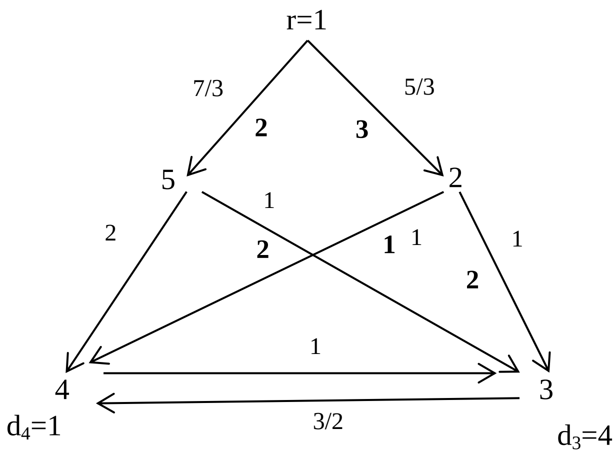
$$min \frac{5}{3} f_{12} + \frac{7}{3} f_{15} + f_{23} + f_{24} + f_{53} + 2 f_{54} + \frac{3}{2} f_{34} + f_{43}$$

s.c.

$$\begin{cases} -f_{15} - f_{12} = -5 \quad (r = 1) \\ f_{15} - f_{54} - f_{53} = 0 \quad (sommet\ 5) \\ f_{12} - f_{24} - f_{23} = 0 \quad (sommet\ 2) \\ f_{54} + f_{24} - f_{43} = 1 \quad (sommet\ 4) \\ f_{23} + f_{53} - f_{34} = 4 \quad (sommet\ 3) \\ f_{ij} \leq u_{ij} \ \ (i,j) \in \{(1,5),(1,2),(5,4), \dots\} \\ f_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

5- Les arcs sont affectés d'un coût c_{ij}/u_{ij} et le problème revient à acheminer la demande par des chemins optimaux relativement à ces coûts.

Les coûts de flot (par unité de flot) sont indiqués sur le graphe ci-dessous. La solution est en gras :



Le coût total est 5+2+14/3+2+1=14+2/3.

6-La solution est fractionnaire. Au sommet 3, on a : x_{23}=2/5, x_{53}=2/2=1, x_{43}=0, x_{34}=0.

Prenons $C^+=\{(2,3),(5,3)\}$. $u_{23}+u_{53}=5+2=7=d_3+3=4+3$ et $\lambda=3$.

On obtient l'inégalité de couverture de flot :

$$f_{23} + f_{53} - f_{34} \leq d_3 + (\lambda - u_{23})^{-}(1 - x_{23}) + (\lambda - u_{53})^{-}(1 - x_{53})$$

Où $a^-=\min\{0,a\}$.

Ce qui donne :

$$f_{23} + f_{53} - f_{34} \leq 4 + (3 - 5)^{-}(1 - x_{23}) + (3 - 2)^{-}(1 - x_{53})$$

soit finalement :

$$f_{23} + f_{53} - f_{34} \leq 2 + 2x_{23}$$

L'inégalité est violée par la solution de la relaxation continue de SCF : $2+2-0 > 2+2\times 2/5$

Rappel.

Problème SCF :

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{(j,i)\in A} f_{ji} - \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} = \begin{cases} d_i & i \in D \\ -\sum_{k\in D} d_k & i = r \\ 0 & i \in V \setminus (D \cup \{r\}) \end{cases} \\ f_{ij} \leq u x_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad f_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \end{cases}$$