

Réseaux d'accès dans les télécommunications

Master MPRO

Option RORT

Recherche Opérationnelle dans les Réseaux et le Transport

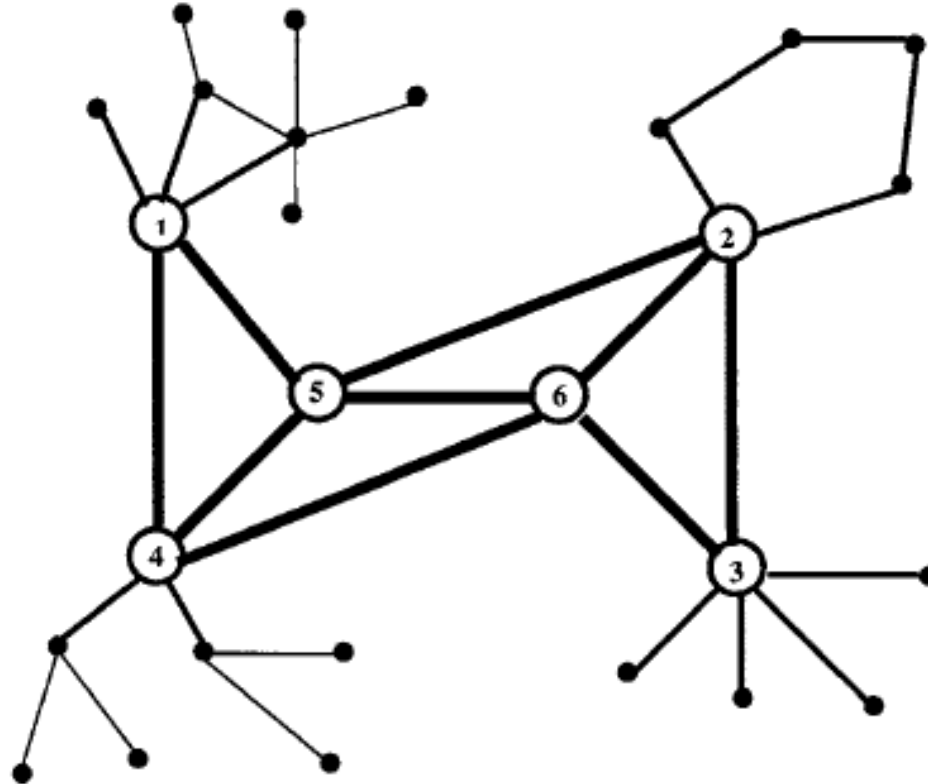
Alain Faye ENSIIE

Réseaux d'accès dans les télécommunications

Modèles mathématiques pour la conception des réseaux d'accès

- Modèles de base
- Extensions:
 - Réseaux d'accès hiérarchiques avec deux technologies
 - Réseaux d'accès FTTH
 - Réseaux d'accès en téléphonie mobile

Cœur du réseau et réseaux d'accès



Réseau cœur (traits gras)

Réseau d'accès collecte les clients pour les raccorder au cœur

Ici 4 réseaux d'accès de points d'entrée 1, 2, 3, 4

Construction d'un réseau d'accès

Problématique:

- Choisir arcs et câbles à mettre sur les arcs
- Acheminer le trafic du point d'entrée dans le réseau cœur vers les clients

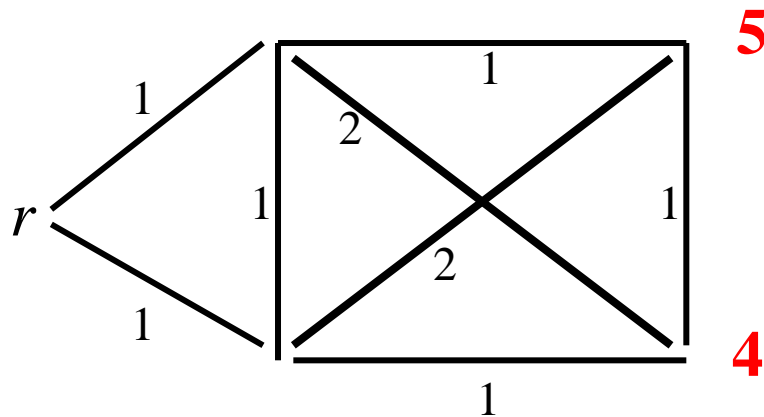
Données

- Graphe à partir duquel on choisit les arcs
- Les clients sur les nœuds du graphe
- Demandes des clients
- Liste des câbles que l'on peut mettre sur les arcs

Exemple:

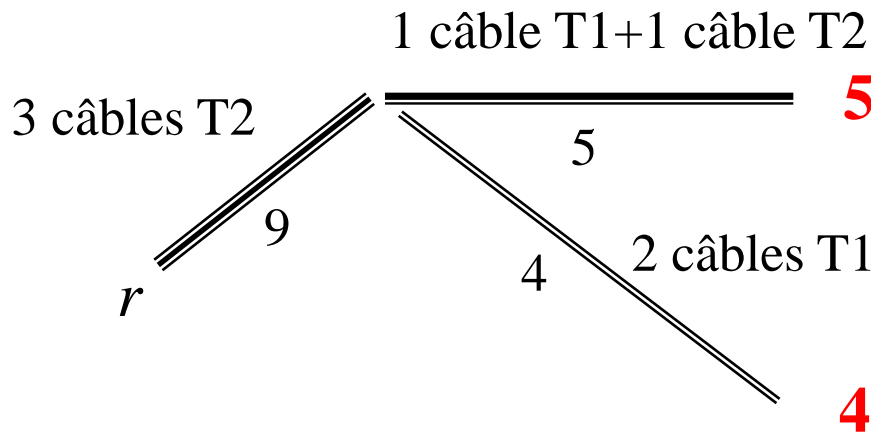
2 points de demandes: une demande de 5, une demande de 4

Arêtes de longueur 1 et 2 (trait épais)



Type de câbles	Capacité	Coût par unité de longueur
T1	2	0,15
T2	3	0,2

Une solution:



Coût de cette solution

$$3 \times 0,2 + 0,15 + 0,2 + 2 \times 2 \times 0,15$$

Modèle de base du réseau d'accès

$$\min \sum_{(i,j) \in A} l_{ij} \sum_{h \in Q_{ij}} c_{ij,h} y_{ij,h}$$

$$s.c. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{(j,i) \in A} f_{ji} - \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} = \begin{cases} d_i & i \in D \\ -\sum_{k \in D} d_k & i = r \\ 0 & i \in V \setminus (D \cup \{r\}) \end{cases} \\ f_{ij} \leq \sum_{h \in Q_{ij}} u_{ij,h} y_{ij,h} \quad \forall (i,j) \in A \\ y_{ij,h} \in \{0,1,2,\dots\} \quad \forall (i,j) \in A, \forall h \in Q_{ij} \\ f_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \end{array} \right.$$

Données

r nœud racine (entrée dans réseau cœur)

Q_{ij} types de câbles que l'on peut mettre sur l'arc (i,j)

$u_{ij,h}$ capacité du câble de type h sur l'arc (i,j)

Variables

$y_{ij,h}$ nombre de câbles de type h installés sur l'arc (i,j)

Pour y fixé, on a un problème de flot en variables f continues

Coût des câbles sur un arc (i, j)

Exprimer ce coût en fonction du flot f_{ij} passant sur l'arc (i, j)

$$C(f_{ij}) = \min \sum_{h \in Q_{ij}} c_{ij,h} y_{ij,h}$$
$$s.c. \quad \begin{cases} f_{ij} \leq \sum_{h \in Q_{ij}} u_{ij,h} y_{ij,h} \\ y_{ij,h} \in \{0, 1, 2, \dots\} \end{cases} \quad \forall h \in Q_{ij}$$

$c_{ij,h}$ coût du câble h sur l'arc (i, j)

$u_{ij,h}$ capacité du câble h sur l'arc (i, j)

Sac-à-dos en nombres entiers

Résolution par programmation dynamique

Solution donnée par les formules de récurrence :

$$C(f) = \begin{cases} 0 & f \leq 0 \\ \min_{\substack{h=1,\dots,k \\ u_{k-1} < f \leq u_k}} c_h + C(f - u_h) & 0 < f \leq u_{|Q|} \\ \min_{h=1,\dots,|Q|} c_h + C(f - u_h) & f \geq u_{|Q|} \end{cases}$$

- on suppose les câbles rangés par capacité u_k croissante $k=1,\dots,|Q|$
- on considère les câbles de 1 à k t.q. k est le premier câble qui peut contenir f ($u_k \geq f$ et $u_{k-1} < f$) car au-delà ils sont plus chers et n'apportent rien de plus
- on rajoute 1 câble à la fois

Exemple:

Type de câble h	Capacité u_h	Coût câble c_h
1	6	0,55
2	24	1,03
3	48	1,67
4	96	3,03

f	Calcul de la solution	C	module
$0 \leq f \leq 6$	$k=1 \quad c_1=0,55$	0,55	câble type1
$6 < f \leq 12$	$k=2 \quad \min\{c_2+C(f-24) ; c_1+C(f-6)\}=\min\{1,03 ; 0,55+0,55\}$	1,03	câble type2
$12 < f \leq 18$	$k=2 \quad \min\{c_2+C(f-24) ; c_1+C(f-6)\}=\min\{1,03 ; 0,55+1,03\}$	1,03	câble type2
$18 < f \leq 24$	idem	1,03	câble type2
$24 < f \leq 30$	$k=3 \quad \min\{c_3+C(f-48) ; c_2+C(f-24) ; c_1+C(f-6)\}=\min\{1,67 ; 1,03+0,55 ; 0,55+1,03\}$	1,58	câble type2+ câble type1
$30 < f \leq 36$	$k=3 \quad \min\{c_3+C(f-48) ; c_2+C(f-24) ; c_1+C(f-6)\}=\min\{1,67 ; 1,03+1,03 ; 0,55+1,58\}$	1,67	câble type3

Modules

Maintenant pour les capacités installées sur les arcs,
on raisonne par module

Un module représente un assemblage de câbles

Un module a une capacité et un coût

On place ou pas un module (et un seul) par arc

Modèle SCF (Single Commodity Flot)

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{(i,j) \in A} l_{ij} \sum_{h \in M_{ij}} c_{ij,h} x_{ij,h} \\
 & \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{(j,i) \in A} f_{ji} - \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} = \begin{cases} d_i & i \in D \\
 -\sum_{k \in D} d_k & i = r \\
 0 & i \in V \setminus (D \cup \{r\}) \end{cases} \\
 \sum_{h \in M_{ij}} x_{ij,h} \leq 1 & \quad \forall (i, j) \in A \\
 f_{ij} \leq \sum_{h \in M_{ij}} u_{ij,h} x_{ij,h} & \quad \forall (i, j) \in A \\
 x_{ij,h} \in \{0,1\} \quad f_{ij} \geq 0 & \quad \forall (i, j) \in A, \forall h \in M_{ij}
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

M_{ij} types de modules que l'on peut mettre sur l'arc (i, j)

$x_{ij,h} = 1$ si le module h est installé sur l'arc (i, j)

Modèle MCF (Multi-Commodité Flot)

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{(i,j) \in A} l_{ij} \sum_{h \in M_{ij}} c_{ij,h} x_{ij,h} \\
 & \text{s.c.} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{(j,i) \in A} f_{ji}^k - \sum_{(i,j) \in A} f_{ij}^k = \begin{cases} d_i & i = k \in D \\ -d_k & i = r, k \in D \\ 0 & i \in V \setminus \{r\}, k \in D \setminus \{i\} \end{cases} \\
 \sum_{h \in M_{ij}} x_{ij,h} \leq 1 & \quad \forall (i, j) \in A \\
 \sum_{k \in D} f_{ij}^k \leq \sum_{h \in M_{ij}} u_{ij,h} x_{ij,h} & \quad \forall (i, j) \in A \\
 f_{ij}^k \leq d_k \sum_{h \in M_{ij}} x_{ij,h} & \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in D \quad (C_1) \\
 x_{ij,h} \in \{0,1\} \quad f_{ij}^k \geq 0 & \quad \forall (i, j) \in A, \forall h \in M_{ij}, \forall k \in D
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Un flot par client

C_1 : sur chaque arc, le flot du client k est nul si aucun module installé

Modèle DMCF (Désagrégé Multi-Commodité Flot)

$$\begin{aligned}
 \min & \sum_{(i,j) \in A} l_{ij} \sum_{h \in M_{ij}} c_{ij,h} x_{ij,h} \\
 \text{s.c.} & \left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{(j,i) \in A} \sum_{h \in M_{ij}} f_{ji,h}^k - \sum_{(i,j) \in A} \sum_{h \in M_{ij}} f_{ij,h}^k = \begin{cases} d_i & i = k \in D \\ -d_k & i = r, k \in D \\ 0 & i \in V \setminus \{r\}, k \in D \setminus \{i\} \end{cases} \\
 & \sum_{h \in M_{ij}} x_{ij,h} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A \\
 & \sum_{k \in D} f_{ij,h}^k \leq u_{ij,h} x_{ij,h} \quad \forall (i, j) \in A, \forall h \in M_{ij} \\
 & f_{ij,h}^k \leq d_k x_{ij,h} \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in D, \forall h \in M_{ij} \quad (C_2) \\
 & x_{ij,h} \in \{0,1\} \quad f_{ij,h}^k \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \forall h \in M_{ij}, \forall k \in D
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Un flot par client et par module

C_2 : sur chaque arc, le flot du client k et du module h est nul si le module h n'est pas installé

Comparaison des relaxations continues des modèles

Les 3 problèmes ont même fonction objectif.

On note $v_{\text{Relax}}(\text{P})$ la valeur minimale de l'objectif de la relaxation continue d'un problème P.

On a :

$$v_{\text{Relax}}(\text{SCF}) \leq v_{\text{Relax}}(\text{MCF}) \leq v_{\text{Relax}}(\text{DMCF})$$

A partir de MCF on pose $f_{ij} = \sum_k f_{ij}^k$ et on additionne contraintes de flot sur k : on retrouve SCF

A partir de DMCF on pose $f_{ij}^k = \sum_h f_{ij,h}^k$ et on additionne contraintes (C_2) sur h : on retrouve MCF

Différentes approches pour résoudre les modèles

Relaxation lagrangienne des contraintes couplant les variables d'arc x et les variables de flot f

Décomposition de Benders : on « élimine » les variables de flot f .
Utilisée pour modèles MCF, DMCF car beaucoup variables f .

- problème maître en variables d'arc x ,
- sous-problème en variables de flot f

Ajout d'inégalités valides

- Inégalité sur les variables d'arc x
- Inégalité en variables d'arc x et de flot f

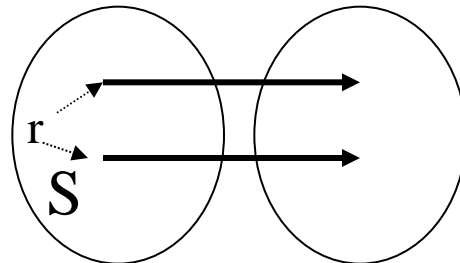
Inégalités *coupe*

Basée sur le modèle SCF

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} \sum_{h \in M_{ij}} u_{ij,h} x_{ij,h} \geq \sum_{k \in D \setminus S} d_k \quad (\text{coupe})$$

ceci $\forall S \subset V$ t.q. $r \in S, D \not\subset S$

Cette inégalité s'interprète comme :
il faut une capacité suffisante sortant de S pour acheminer
la demande aux clients à l'extérieur de S .



Séparation de l'inégalité *coupe*

Pour x fixé, on cherche S de façon à construire une inégalité *coupe* violée

$$G'=(V\cup\{t\},A\cup A')$$

On munit arc $(i, j)\in A$ avec capacité $\sum_{h\in M_{ij}}u_{ij,h}x_{ij,h}$

$$A'=\{\text{arcs } (k, t): k\in D\}$$

On munit arc $(k, t)\in A'$ avec capacité d_k

On calcule flot max de r à t . On obtient une coupe min séparant r et t

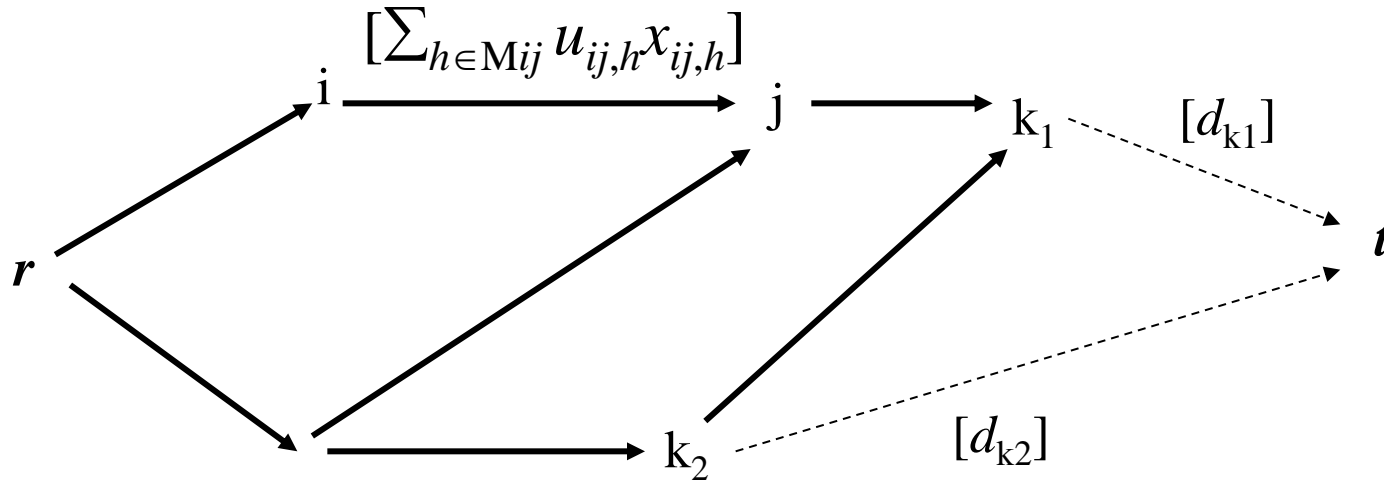
Par théorème (Ford-Fulkerson) la capacité de cette coupe=flot max

Si le flot max $< \sum_{k\in D}d_k$

alors la capacité de cette coupe $< \sum_{k\in D}d_k$

On en déduit S (sommets marqués par algo. de Ford-Fulkerson) qui ne contient pas tous les sommets de D . Cet ensemble S viole la contrainte *coupe*.

Graphe pour séparation de l'inégalité *coupe*



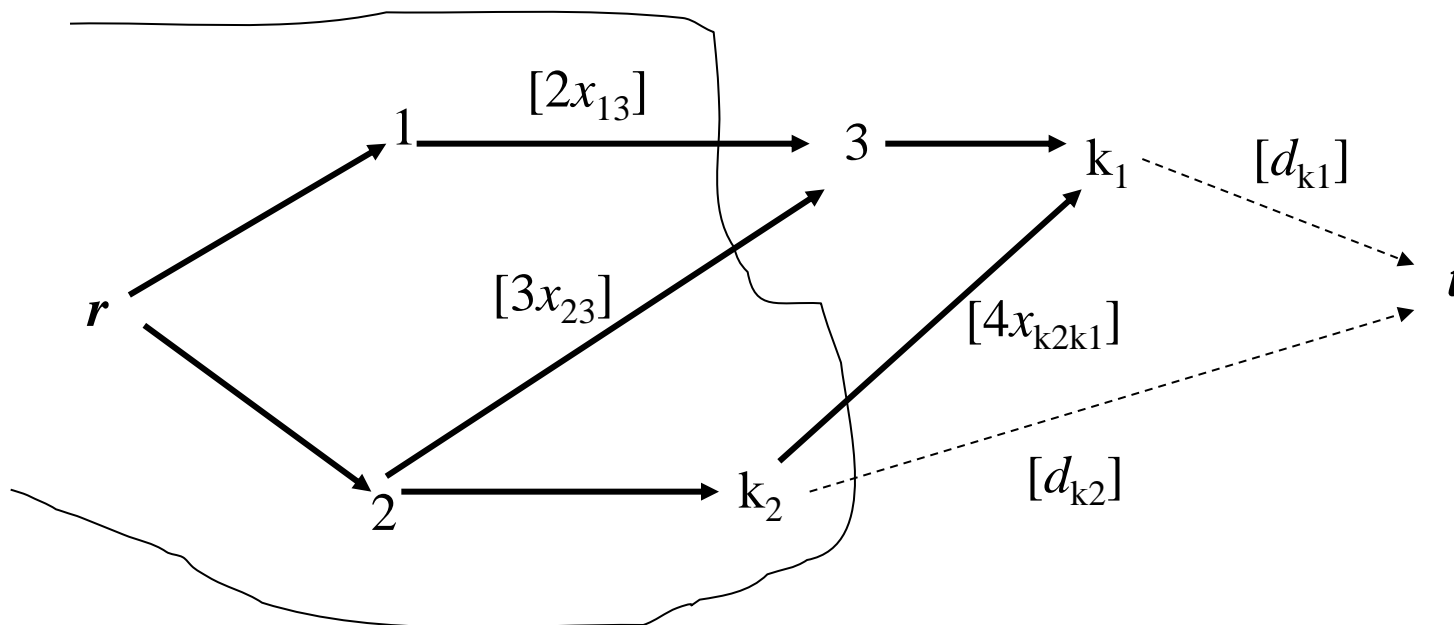
En gras: graphe initial

En pointillé: les arcs que l'on rajoute

Capacité sur les arcs []

On cherche un flot max de r à t soit encore une coupe de capacité minimum séparant r et t

Exemple avec un seul module par arc



On considère une coupe minimum $S = \{r, 1, 2, k_2\}$

La capacité de $S = 2x_{13} + 3x_{23} + 4x_{k_2k_1} + d_{k_2}$

La capacité de $S =$ flot max entre r et t (Th. Ford-Fulkerson)

Si le flot max est $< d_{k_1} + d_{k_2}$

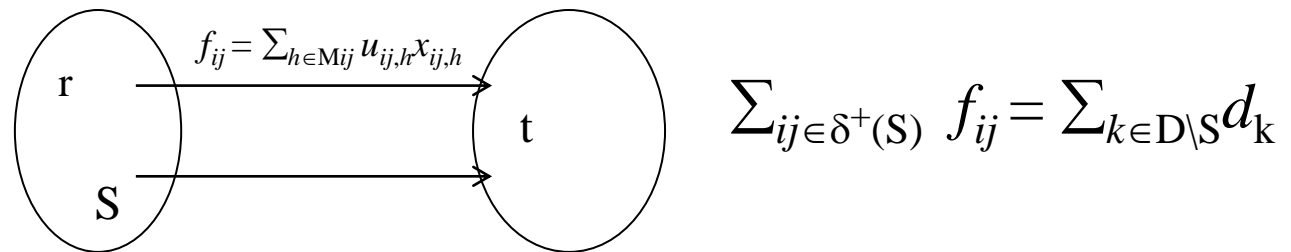
Alors $2x_{13} + 3x_{23} + 4x_{k_2k_1} + d_{k_2} < d_{k_1} + d_{k_2}$

Or pour acheminer la demande en k_1 il faut $2x_{13} + 3x_{23} + 4x_{k_2k_1} \geq d_{k_1}$

Donc on a détecté une contrainte *coupe* violée

La solution x de la **relaxation continue** de SCF vérifie toutes les inégalités *coupe*.

En effet, les contraintes de capacité $f_{ij} \leq \sum_{h \in M_{ij}} u_{ij,h} x_{ij,h}$ sont saturées ($f_{ij} = \sum_{h \in M_{ij}} u_{ij,h} x_{ij,h} \quad \forall (i,j) \in A$) car x_{ij} se met au plus bas pour minimiser le coût



Par contre, de ces inégalités *coupe*, on peut en déduire d'autres potentiellement violées. Ce sont les inégalités de *couverture*.

Inégalité de *couverture*

On part d'une inégalité *coupe*:

Pour $\forall x_{ij,h} \in \{0,1\}$:

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} \sum_{h \in M_{ij}} u_{ij,h} x_{ij,h} \geq \underbrace{\sum_{k \in D \setminus S} d_k}_{\mathbf{b}} \quad (\text{coupe})$$

On note :

$$I(S) = \{(i,j,h) : (i,j) \in \delta^+(S), h \in M_{ij}\}$$

$$\mathbf{b} = \sum_{k \in D \setminus S} d_k$$

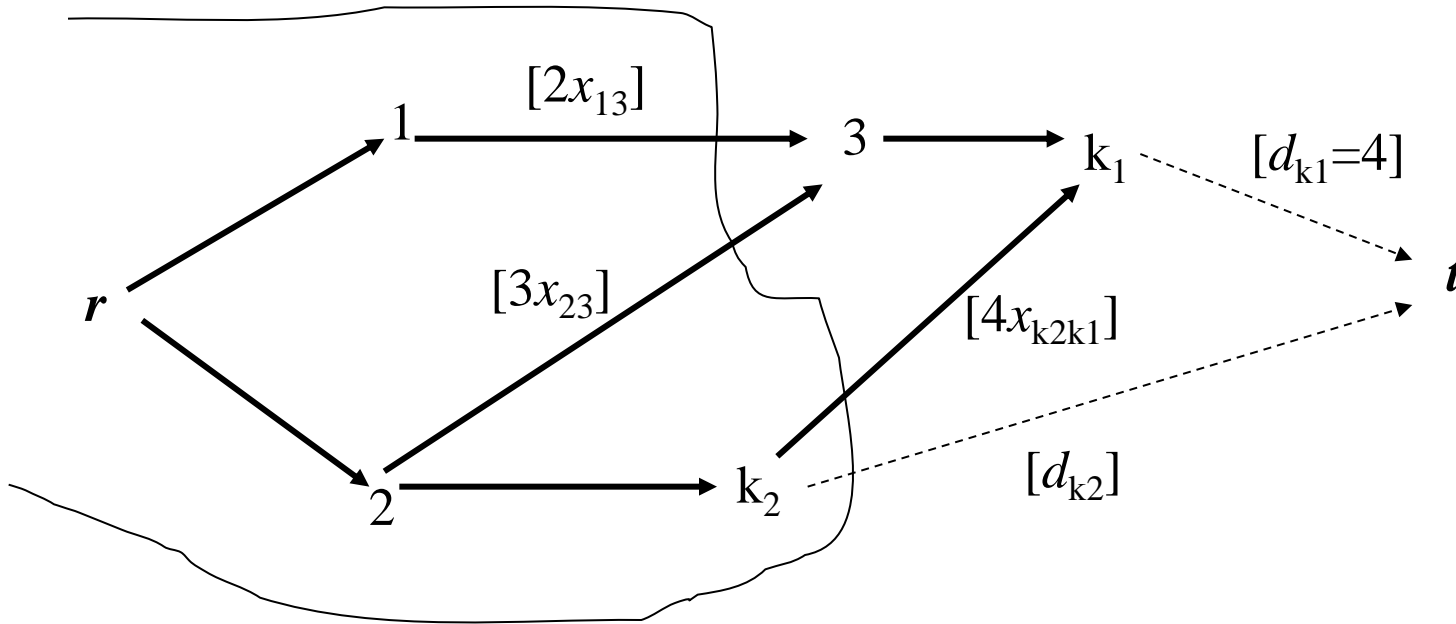
Soit $\mathbf{C} \subset I(S)$ t.q. $\sum_{(i,j,h) \in \mathbf{C}} u_{ij,h} < \mathbf{b}$

\mathbf{C} est une couverture

Si \mathbf{C} est une couverture l'inégalité suivante est valide:

$$\sum_{(i,j,h) \in I(S) \setminus \mathbf{C}} x_{ij,h} \geq 1 \quad (\text{inégalité de } \textit{couverture})$$

Exemple avec un seul module par arc



On considère $S = \{r, 1, 2, k_2\}$

Inégalité *coupe*: $2x_{13} + 3x_{23} + 4x_{k_2k_1} \geq 4$

$C = \{(2,3)\}$ est une couverture

Inégalité de *couverture*: $x_{13} + x_{k_2k_1} \geq 1$

$x_{23} = 1$, $x_{13} = 1/2$, $x_{k_2k_1} = 0$ satisfait *coupe* mais pas *couverture*

Exercice:

Formaliser le problème de la séparation de l'inégalité de *couverture* comme un programme linéaire en variables 0-1.

On étudiera deux formulations se différenciant par le sens des variables utilisées:

1-Formulation simple

$z_{ij,h} = 1$ si $(ij,h) \in I(S)$ est mis dans C

$z_{ij,h} = 0$ sinon

2-Deuxième formulation

$z_{ij,h} = 1$ si $(ij,h) \in I(S)$ est mis dans C ainsi que tous les modules de l'arc (i,j) de capacité inférieure ou égale à $u_{ij,h}$

$z_{ij,h} = 0$ sinon

Inégalités de couverture de flot

Ce sont des inégalités qui mêlent variables de flot f et variables d'arcs x

Il existe plusieurs familles et extensions

Application

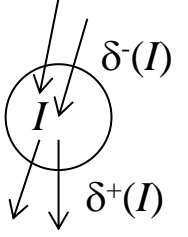
Les inégalités de couverture de flot s'appliquent à SCF , MCF ou DMCF

Exemple sur SCF:

On choisit $I \subset D$ un ensemble de nœuds de demande

On additionne les contraintes de flot sur les nœuds $i \in I$

On considère les contraintes de borne sur les arcs incidents à I

$$\begin{cases} \sum_{(j,i) \in \delta^-(I)} f_{ji} - \sum_{(i,j) \in \delta^+(I)} f_{ij} = \sum_{i \in I} d_i \\ f_e \leq \sum_{h \in M_e} u_{e,h} x_{e,h} \quad \forall e \in \delta(I) \end{cases}$$


$\delta(I) = \delta^-(I) \cup \delta^+(I)$ arcs incidents à I

On relâche l'égalité en une inégalité \leq

On se retrouve avec un ensemble T comme suit

On obtient une structure T de la forme :

$$T = \left\{ \begin{array}{l} (f, x) \in R_+^n \times \{0,1\}^{n \times m} : \sum_{j \in N^+} f_j - \sum_{j \in N^-} f_j \leq b, \\ f_j \leq \sum_{h \in M_j} u_{j,h} x_{j,h}, \sum_{h \in M_j} x_{j,h} \leq 1 \quad \forall j \in N^+ \cup N^- \end{array} \right\}$$

$N^+ = \delta^-(I)$ arcs entrants dans I, $N^- = \delta^+(I)$ arcs sortant de I
 $b = \sum_{i \in I} d_i$

Dans la suite, on distinguera deux cas :

- un seul module par arc j $|M_j|=1$
- plusieurs modules par arc

Inégalité de couverture de flot avec un seul module par arc

$$T = \left\{ (f, x) \in R_+^n \times \{0,1\}^n : \sum_{j \in N^+} f_j - \sum_{j \in N^-} f_j \leq b, f_j \leq u_j x_j \quad \forall j \in N^+ \cup N^- \right\}$$

Inégalité de couverture de flot:

Soit $C^+ \subset N^+$ t.q. $\sum_{j \in C^+} u_j = b + \lambda$ avec $\lambda \geq 0$

$$\sum_{j \in C^+} f_j - \sum_{j \in N^-} f_j \leq b + \sum_{j \in C^+} (\lambda - u_j)^- (1 - x_j)$$

Où $(\lambda - u_j)^- = \min\{0, \lambda - u_j\}$

L'inégalité de couverture de flot est valide pour T

Inégalité de couverture de flot étendue avec un seul module par arc

$$T = \left\{ (f, x) \in R_+^n \times \{0,1\}^n : \sum_{j \in N^+} f_j - \sum_{j \in N^-} f_j \leq b, f_j \leq u_j x_j \quad \forall j \in N^+ \cup N^- \right\}$$

Inégalité de couverture de flot étendue:

Soit $C^+ \subset N^+$ t.q. $\sum_{j \in C^+} u_j = b + \lambda$ avec $\lambda \geq 0$, $C^- \subset N^-$

$$\sum_{j \in C^+} f_j - \sum_{j \in N^- \setminus C^-} f_j \leq b + \sum_{j \in C^-} u_j x_j + \sum_{j \in C^-} (\lambda - u_j)^- x_j + \sum_{j \in C^+} (\lambda - u_j)^- (1 - x_j)$$

L'inégalité de couverture de flot étendue est valide pour T

Théorème

$$\text{Si: } \begin{cases} \sum_{j \in C^+} u_j = b + \lambda \text{ avec } \lambda > 0 \\ u_1 = \max_{C^+} \{u_j\} > \lambda, \min_{C^-} \{u_j\} > \lambda \end{cases}$$

Alors l'inégalité de couverture étendue

$$\sum_{j \in C^+} f_j - \sum_{j \in N^- \setminus C^-} f_j \leq b + \sum_{j \in C^-} u_j x_j + \sum_{j \in C^-} (\lambda - u_j)^- x_j + \sum_{j \in C^+} (\lambda - u_j)^- (1 - x_j)$$

induit une facette de $\text{Conv}T$

Remarque: sous les conditions, l'inégalité devient

$$\sum_{j \in C^+} f_j - \sum_{j \in N^- \setminus C^-} f_j \leq b + \sum_{j \in C^-} \lambda x_j + \sum_{j \in C^+} (\lambda - u_j)^- (1 - x_j)$$

Démonstration

Notations

$$u = \left(u_1 \quad \cdots \quad u_k \quad \cdots \quad u_{|C^+|} \right)$$

$$\bar{1} = (1 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 1)$$

$$e_k = (0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0)$$

$$z = \left(f_k, x_k \mid k \in C^+ \mid f_k, x_k \mid k \in N^+ \setminus C^+ \mid f_k, x_k \mid k \in C^- \mid f_k, x_k \mid k \in N^- \setminus C^- \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left[z_k = (u - \lambda e_k \ \vdots \ \bar{1} \mid 0 \ 0 \mid 0 \ 0 \mid 0 \ 0) \quad k \text{ t.q. } u_k \geq \lambda \right. \\
& \left[z_k = (u - (\lambda - u_k)e_1 - u_k e_k \ \vdots \ \bar{1} \mid 0 \ 0 \mid 0 \ 0 \mid 0 \ 0) \quad k \text{ t.q. } u_k < \lambda \right. \\
& \left[\tilde{z}_k = (u - u_k e_k \ \vdots \ \bar{1} - e_k \mid 0 \ 0 \mid 0 \ 0 \mid 0 \ 0) \quad k \text{ t.q. } u_k \geq \lambda \right. \\
& \left[\tilde{z}_k = (u - (\lambda - u_k)e_1 - u_k e_k \ \vdots \ \bar{1} - e_k \mid 0 \ 0 \mid 0 \ 0 \mid 0 \ 0) \quad k \text{ t.q. } u_k < \lambda \right. \\
& \hat{z}_j = (u - u_1 e_1 \ \vdots \ \bar{1} - e_1 \mid 0 \ \vdots \ e_j \mid 0 \ 0 \mid 0 \ 0) \\
& \bar{z}_j = (u - u_1 e_1 \ \vdots \ \bar{1} - e_1 \mid \varepsilon e_j \ \vdots \ e_j \mid 0 \ 0 \mid 0 \ 0) \\
& w_k = (u \ \vdots \ \bar{1} \mid 0 \ 0 \mid \lambda e_k \ \vdots \ e_k \mid 0 \ 0) \\
& \tilde{w}_k = (u \ \vdots \ \bar{1} \mid 0 \ 0 \mid (\lambda + \varepsilon)e_k \ \vdots \ e_k \mid 0 \ 0) \\
& \hat{w}_k = (u - \lambda e_1 \ \vdots \ \bar{1} \mid 0 \ 0 \mid 0 \ 0 \mid 0 \ \vdots \ e_k) \\
& \bar{w}_k = (u - (\lambda - \varepsilon)e_1 \ \vdots \ \bar{1} \mid 0 \ 0 \mid 0 \ 0 \mid \varepsilon e_k \ \vdots \ e_k)
\end{aligned}$$

Ces points vérifient

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in C^+} f_j - \sum_{j \in N^- \setminus C^-} f_j = b + \sum_{j \in C^-} \lambda x_j + \sum_{j \in C^+} (\lambda - u_j) (1 - x_j) \quad (1) \\
& \sum_{j \in N^+} f_j - \sum_{j \in N^-} f_j \leq b, \quad f_j \leq u_j x_j \quad \forall j \in N^+ \cup N^-
\end{aligned}$$

$$\text{Soit } \sum_{k \in N^+ \cup N^-} \mu_k f_k + \pi_k x_k = \pi_0$$

l'équation d'un hyperplan H contenant les points précédents

Montrons que cette équation est identique à (1) à un scalaire multiplicatif près

$$z_1 \text{ et } z_k \text{ avec } k \in C^+ \text{ t.q. } u_k \geq \lambda \text{ sont dans } H \Rightarrow -\lambda\mu_1 = -\lambda\mu_k$$

$$z_1 \text{ et } z_k \text{ avec } k \in C^+ \text{ t.q. } u_k < \lambda \text{ sont dans } H \Rightarrow u_k\mu_1 = u_k\mu_k$$

$$z_1 \text{ et } \tilde{z}_k \text{ avec } k \in C^+ \text{ t.q. } u_k \geq \lambda \text{ sont dans } H \Rightarrow -\lambda\mu_1 + \pi_k = -u_k\mu_k$$

$$z_1 \text{ et } \tilde{z}_k \text{ avec } k \in C^+ \text{ t.q. } u_k < \lambda \text{ sont dans } H \Rightarrow \pi_k + u_k\mu_k = u_k\mu_1$$

$$\hat{z}_j \text{ et } \bar{z}_j \text{ } j \in N^+ \setminus C^+ \Rightarrow \varepsilon\mu_j = 0, \hat{z}_j \text{ et } \hat{z}_1 \text{ } j \in N^+ \setminus C^+ \Rightarrow \pi_j = 0$$

$$w_k \text{ et } \tilde{w}_k \text{ } k \in C^- \Rightarrow \varepsilon\mu_k = 0, w_k \text{ et } z_1 \text{ } k \in C^- \Rightarrow -\lambda\mu_1 = \lambda\mu_k + \pi_k$$

$$\hat{w}_k \text{ et } \bar{w}_k \text{ } k \in N^- \setminus C^- \Rightarrow \varepsilon\mu_1 + \varepsilon\mu_k = 0, \hat{w}_k \text{ et } z_1 \text{ } k \in N^- \setminus C^- \Rightarrow \pi_k = 0$$

De ces équations, on déduit:

$$\mu_1 = \mu_k \text{ } k \in C^+, \pi_k = \lambda - \mu_k \text{ } k \in C^+ \text{ si } u_k \geq \lambda, \pi_k = 0 \text{ sinon}$$

$$\mu_j = 0, \pi_j = 0 \text{ } j \in N^+ \setminus C^+$$

$$\mu_k = 0, \pi_k = -\lambda\mu_1 \text{ } k \in C^-$$

$$\mu_k = -\mu_1, \pi_k = 0 \text{ } k \in N^- \setminus C^-$$

Il ne reste plus que μ_0 à trouver .

$$\text{Un quelconque des points va donner } \mu_0 = \mu_1 (b + \sum_{j \in C^+} (\lambda - u_j)^-)$$

Inégalité de couverture de flot avec plusieurs modules par arc

$$T = \left\{ \begin{array}{l} (f, x) \in R_+^n \times \{0,1\}^{n \times m} : \sum_{j \in N^+} f_j - \sum_{j \in N^-} f_j \leq b, \\ f_j \leq \sum_{h \in M_j} u_{j,h} x_{j,h}, \sum_{h \in M_j} x_{j,h} \leq 1 \quad \forall j \in N^+ \cup N^- \end{array} \right\}$$

Inégalité de couverture de flot:

Soit $C^+ \subset N^+$ t.q. $\sum_{j \in C^+} \sum_{h \in M_j} u_{j,h} = b + \lambda$ avec $\lambda \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_j^0 = \min \left\{ 0, \lambda - \sum_{h' \in M_j} u_{j,h'} \right\} \\ A_j^h = \min \left\{ 0, \lambda - \sum_{h' \in M_j \setminus \{h\}} u_{j,h'} \right\} \end{array} \right\} \quad \forall h \in M_j$$

$$\sum_{j \in C^+} f_j - \sum_{j \in N^-} f_j \leq b + \sum_{j \in C^+} \left(A_j^0 \left(1 - \sum_{h \in M_j} x_{j,h} \right) + \sum_{h \in M_j} A_j^h x_{j,h} \right)$$

Inégalité de couverture de flot étendue avec plusieurs modules par arc

$$T = \left\{ \begin{array}{l} (f, x) \in R_+^n \times \{0,1\}^{n \times m} : \sum_{j \in N^+} f_j - \sum_{j \in N^-} f_j \leq b, \\ f_j \leq \sum_{h \in M_j} u_{j,h} x_{j,h}, \sum_{h \in M_j} x_{j,h} \leq 1 \quad \forall j \in N^+ \cup N^- \end{array} \right\}$$

Inégalité de couverture de flot étendue :

Soit $C^+ \subset N^+$ t.q. $\sum_{j \in C^+} \sum_{h \in M_j} u_{j,h} = b + \lambda$ avec $\lambda \geq 0$, $C^- \subset N^-$

$$j \in C^+ \left\{ \begin{array}{l} A_j^0 = \min \left\{ 0, \lambda - \sum_{h' \in M_j} u_{j,h'} \right\} \\ A_j^h = \min \left\{ 0, \lambda - \sum_{h' \in M_j \setminus \{h\}} u_{j,h'} \right\} \end{array} \right\} \quad \forall h \in M_j$$

$$j \in C^-, B_j^h = \min \{ 0, \lambda - u_{j,h} \} \quad \forall h \in M_j$$

$$\sum_{j \in C^+} f_j - \sum_{j \in N^- \setminus C^-} f_j \leq b +$$

$$\sum_{j \in C^-} \sum_{h \in M_j} (u_{j,h} + B_j^h) x_{j,h} + \sum_{j \in C^+} \left(A_j^0 \left(1 - \sum_{h \in M_j} x_{j,h} \right) + \sum_{h \in M_j} A_j^h x_{j,h} \right) \quad 34$$

Inégalité de couverture de flot avec un flot par module

L'inégalité de couverture de flot avec plusieurs modules par arc n'induit pas toujours une facette. Il peut être intéressant de désagréger le flot en prenant un flot par module.

Voyons un exemple avec deux modules par arc.

$$T = \left\{ (f_1, f_2, x_1, x_2) \in R_+^n \times R_+^n \times \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n : \sum_{j \in N^+} (f_{j,1} + f_{j,2}) - \sum_{j \in N^-} (f_{j,1} + f_{j,2}) \leq b \right. \\ \left. f_{j,h} \leq u_{j,h} x_{j,h} \ (h=1,2), x_{j,1} + x_{j,2} \leq 1 \ \forall j \in N^+ \cup N^- \right\}$$

$$C_1^+ \subset N^+, C_2^+ \subset N^+, C_1^+ \cap C_2^+ = \emptyset \text{ et t.q. } \sum_{j \in C_1^+} a_{j,1} + \sum_{j \in C_2^+} a_{j,2} = b + \lambda \text{ avec } \lambda \geq 0$$

$$C_1^- \subset N^-, C_2^- \subset N^- \text{ t.q. } u_{j,1} > \lambda \ \forall j \in C_1^- \text{ et } u_{j,1} > \lambda \ \forall j \in C_2^-$$

L'inégalité

$$\sum_{j \in C_1^+} f_{j,1} + \sum_{j \in C_2^+} f_{j,2} - \sum_{j \in N^- \setminus C_1^-} f_{j,1} - \sum_{j \in N^- \setminus C_2^-} f_{j,2} \leq b + \\ \lambda \sum_{j \in C_1^-} x_{j,1} + \lambda \sum_{j \in C_2^-} x_{j,2} + \sum_{j \in C_1^+} (\lambda - u_{j,1})^- \bar{x}_{j,1} + \sum_{j \in C_2^+} (\lambda - u_{j,2})^- \bar{x}_{j,2}$$

induit une facette de $\text{Conv}(T)$ si:

$$\lambda > 0, u_{j,1} > \lambda \ \forall j \in C_1^+, u_{j,2} > \lambda \ \forall j \in C_2^+$$

$$\text{Notation : } \bar{x}_{j,h} = 1 - x_{j,h}$$

Exemple

Deux arcs : $N^+ = \{1, 2\}$, $N^- = \emptyset$

$$j = 1 \quad \begin{cases} f_{j,1} \leq 2x_{j,1} \\ f_{j,2} \leq 3x_{j,2} \end{cases}$$

$$j = 2 \quad \begin{cases} f_{j,1} \leq 4x_{j,1} \\ f_{j,2} \leq 5x_{j,2} \end{cases}$$

$$x_{j,1} + x_{j,2} \leq 1 \quad j = 1, 2$$

$$b = 6$$

$$C_1^+ = \{1\}, C_2^+ = \{2\} \Rightarrow f_{1,1} + \bar{x}_{1,1} + f_{2,2} + 4\bar{x}_{2,2} \leq 6$$

$$C_1^+ = \{2\}, C_2^+ = \{1\} \Rightarrow f_{1,2} + 3\bar{x}_{1,2} + f_{2,1} + 2\bar{x}_{2,1} \leq 6$$

Si on ne prend pas un flot par module :

$$C^+ = \{1, 2\} \Rightarrow f_1 + f_2 - x_{2,1} - x_{2,2} \leq 5$$

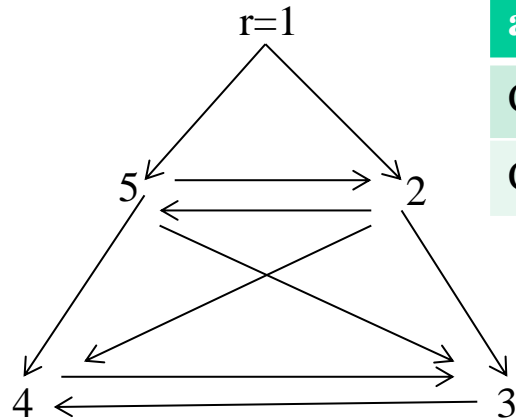
Pour le point fractionnaire suivant, observer la satisfaction ou non des inégalités précédentes

$$f_{1,1} = 0, f_{1,2} = 3, x_{1,1} = 0, x_{1,2} = 1$$

$$f_{2,1} = 3, f_{2,2} = 0, x_{2,1} = \frac{3}{4}, x_{2,2} = 0$$

Exercice

Soit le graphe suivant :



arcs	1,2	1,5	2,5	5,2	2,3	2,4	5,3	5,4	3,4	4,3
Coût flot h_{ij}	2	1	0	1	1	1	1	1	2	1
Coût arc c_{ij}	5	7	3	1	5	2	2	2	2	4

sommets	2	3	4	5
demandes	0	1	2	0

Il y a un seul module disponible par arc de capacité 3

Dans la relaxation continue du modèle SCF avec un seul module par arc, la variable de module se calcule en fonction de la variable de flot par $x_{ij} = f_{ij} / u_{ij}$ où u_{ij} est la capacité du module.

Le coût du flot devient $h_{ij} + c_{ij} / u_{ij}$

1-Après avoir calculé les nouveaux coût de flot, donner la solution de la relaxation continue du modèle SCF

2-A partir de la coupe définie par $S = \{1, 5, 4\}$, formuler le problème de séparation et donner une inégalité de couverture violée

3-Pour chaque sommet 3 et 4, donner une inégalité de couverture de flot violée

Exercice

Un seul type de câble de capacité a . Un noeud de demande b .

On définit $T = \{(f, x) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{N}^n : \sum_{j=1, \dots, n} f_j \leq b, f_j \leq ax_j, j=1, \dots, n\}$

Soit $m \in \mathbb{N}$ t.q. $am = b + \lambda$ avec $\lambda > 0$ et $a(m-1) \leq b$

Soit $C \subseteq \{1, \dots, n\}$

Montrer que $\sum_{j \in C} f_j \leq b + (\lambda - a)(m - \sum_{j \in C} x_j)$ est valide pour T .

Exercice

Une usine fabrique un produit P sur un horizon discrétisé de $t=1$ à T , par exemple t un jour de l'année.

On connaît les demandes d_t en chaque jour t .

Les coûts de production se partagent en :

-coût fixe c_t qui correspond à la mise en œuvre de l'unité de fabrication le jour t

-coût linéaire p_t tel que le coût = $p_t \times$ nombre de produits fabriqués le jour t

Si l'unité de production est lancée le jour t elle sera éteinte le soir.

De sorte que le lendemain, si l'on décide de produire, il faut remettre l'unité de production en marche ce qui engendre le coût fixe.

Il y a de plus le coût de stockage h_t des produits entre t et $t+1$.

Au départ ($t=1$) il n'y a pas de stock et à l'arrivée ($t=T$) il ne doit pas y avoir de stock.

Les capacités de production et de stockage ne sont pas limitées. On peut produire et stocker un grand nombre de produits.

L'objectif est de planifier la production de façon à satisfaire les demandes et au moindre coût.

Il faut donc décider des jours de lancement de la production et en quelles quantités.

1-Modéliser le problème avec les variables :

y_t quantités produites le jour t , s_t hauteur du stock entre t et $t+1$, x_t lancement ou non de la production le jour t .

2-Montrer que ce problème revient à un problème SCF et dessiner le graphe correspondant.

3-Transformer ce problème SCF (single commodity flot) en un MCF (multi-commodity flot).

4-A partir de cette formulation MCF, montrer que le problème revient à un problème UFL

(UFL=localisation d'unités d'approvisionnement sans contrainte de capacité)

Bibliographie

Solving the Capacitated Local Access Network Design Problem

S.Salman, J.Hooker INFORMS Journal on computing Vol.20, n°2 (2008) pp.243-254

Exact Approaches to the Single-Source Network Loading Problem

I.Ljubic, P.Putz, J-J.Salazar-Gonzales Technical report n° [2009-05]

Integer and Combinatorial Optimization

G.Nemhauser, L.Wolsey Wiley Interscience (1988)

Telecommunication Access Network Design

T.Carpenter, H.Luss. Handbook of Optimization in Telecommunication (Chapter 13).

Springer Science/Business Media

Réseaux d'accès hiérarchiques

Réseaux d'accès hiérarchiques

Plusieurs types de technologie en présence.

Par exemple: fil de cuivre ou fibre optique

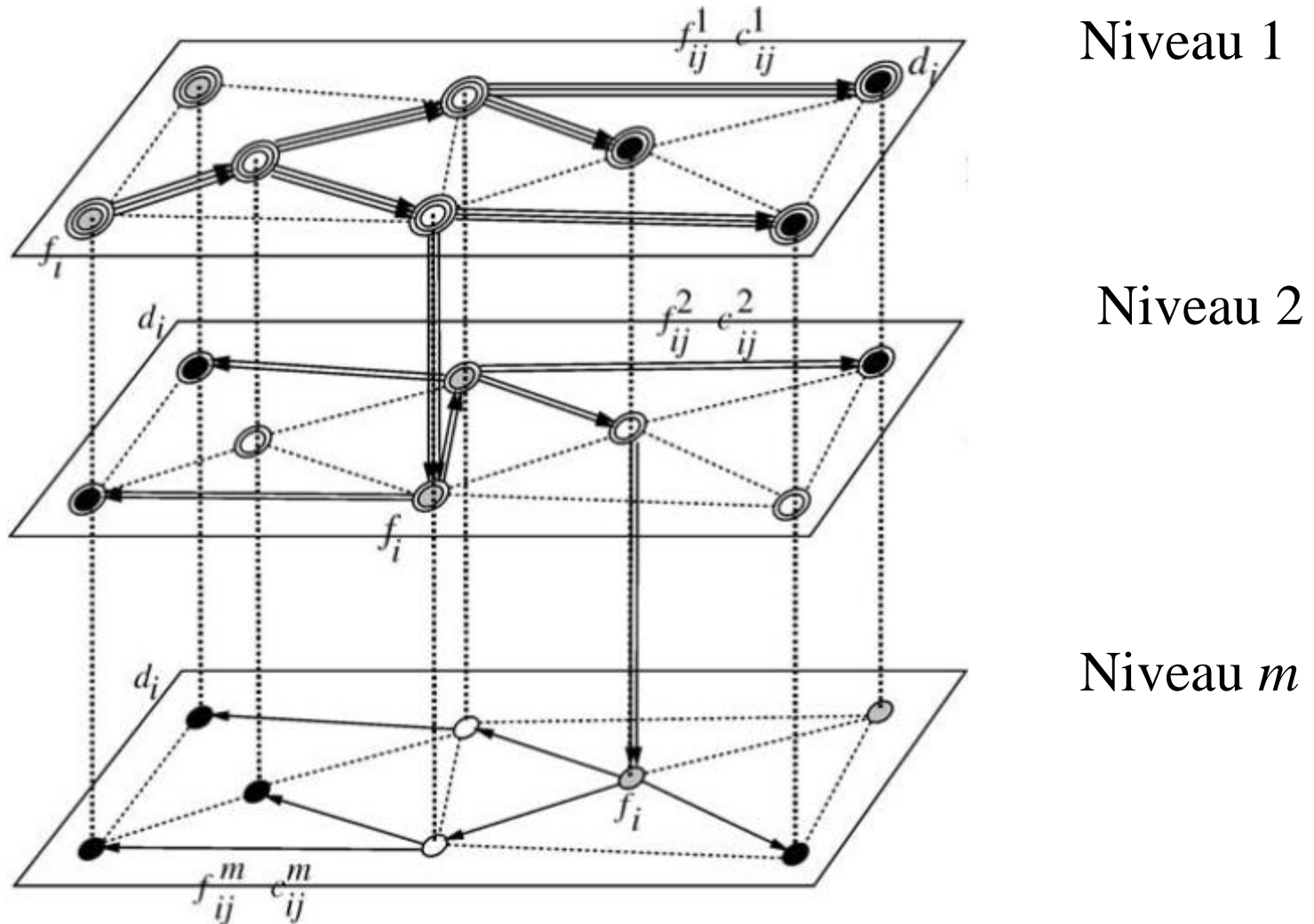
Installation d'appareils (transformateurs) pour que les données puissent passer d'une technologie à l'autre

Les transformateurs sont placés sur certains nœuds du graphe

Il faut répondre aux points suivants:

- Choisir les arcs du graphe
- Choisir la technologie à installer sur les arcs sélectionnés
- Placer les transformateurs

Exemple avec m niveaux



Sommets noirs = points de demandes

Sommets blancs = points où peuvent être placés les transformateurs

Modèle à 2 niveaux

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij,1} x_{ij,1} + c_{ij,2} x_{ij,2} + d_{ij,1} f_{ij,1} + d_{ij,2} f_{ij,2}) + \sum_{i \in V} c_i z_i \\
 \text{s.c.} \quad & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{(j,i) \in A} f_{ji,1} - \sum_{(i,j) \in A} f_{ij,1} = \begin{cases} f_i - \sum_{k \in V} d_k & i = r \\ f_i & \forall i \in V \setminus \{r\} \end{cases} & \text{niveau 1} \\
 0 \leq f_i \leq s z_i & \forall i \in V & \text{passage du} \\
 f_i + \sum_{(j,i) \in A} f_{ji,2} - \sum_{(i,j) \in A} f_{ij,2} = d_i & \forall i \in V & \text{niveau 1 à 2} \\
 0 \leq f_{ij,1} \leq M x_{ij,1}, \quad 0 \leq f_{ij,2} \leq M x_{ij,2} & \forall (i,j) \in A & \text{niveau 2} \\
 x_{ij,1}, x_{ij,2}, z_i \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in A, \forall i \in V
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Un flot par niveau mais pas par client (cf. modèle SCF)

variables

$f_{ij,1}$ flot niveau 1, $f_{ij,2}$ flot niveau 2

$z_i = 1$ si un transformateur est installé en i , 0 sinon

f_i quantité de flot passant du niveau 1 à 2 au nœud i

données

s capacité d'un transformateur, M capacité d'un arc

Ici les demandes d_i sont alimentées par un flot de niveau 2

Réseau primaire : réseau définis par les arcs de technologie 1

Réseau secondaire : arcs de technologie 2

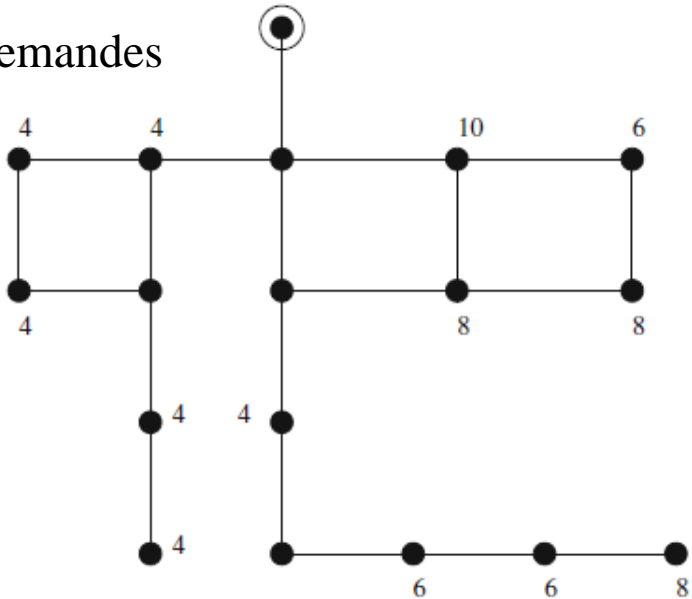
Un arc peut être équipé des deux types de technologie

Des arcs peuvent se retrouver à la fois dans le réseau primaire et dans le secondaire

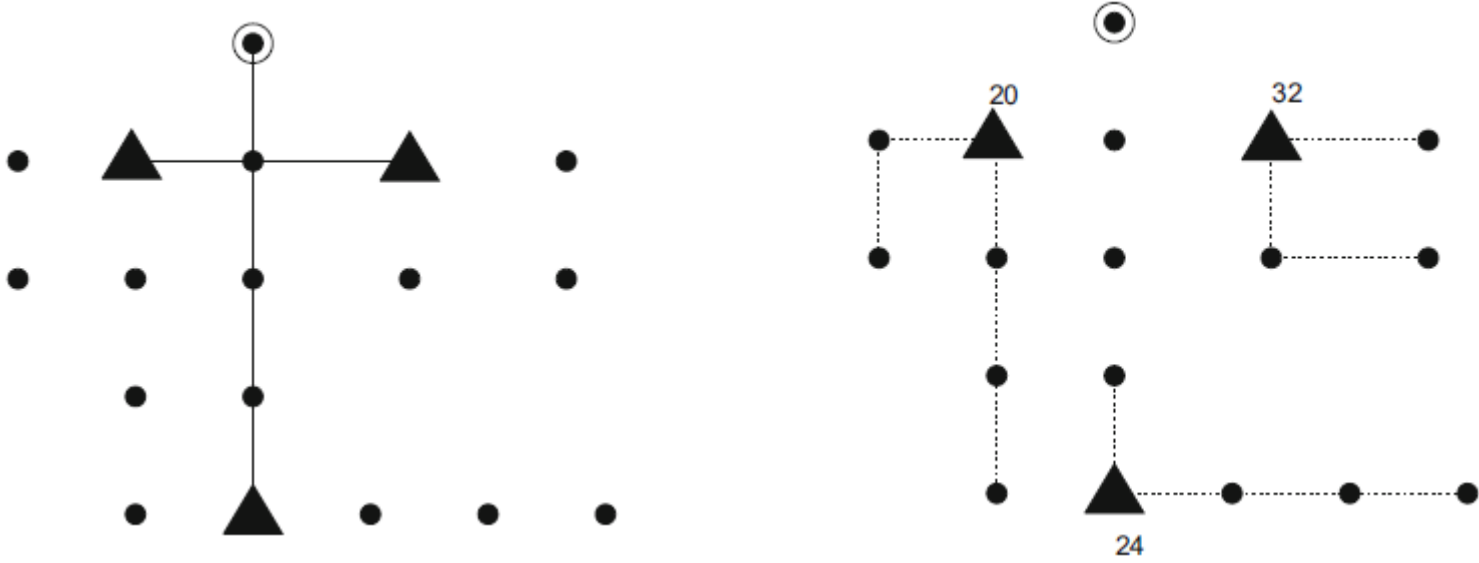
Voir exemple page suivante.

Exemple:

Réseau initial et points de demandes



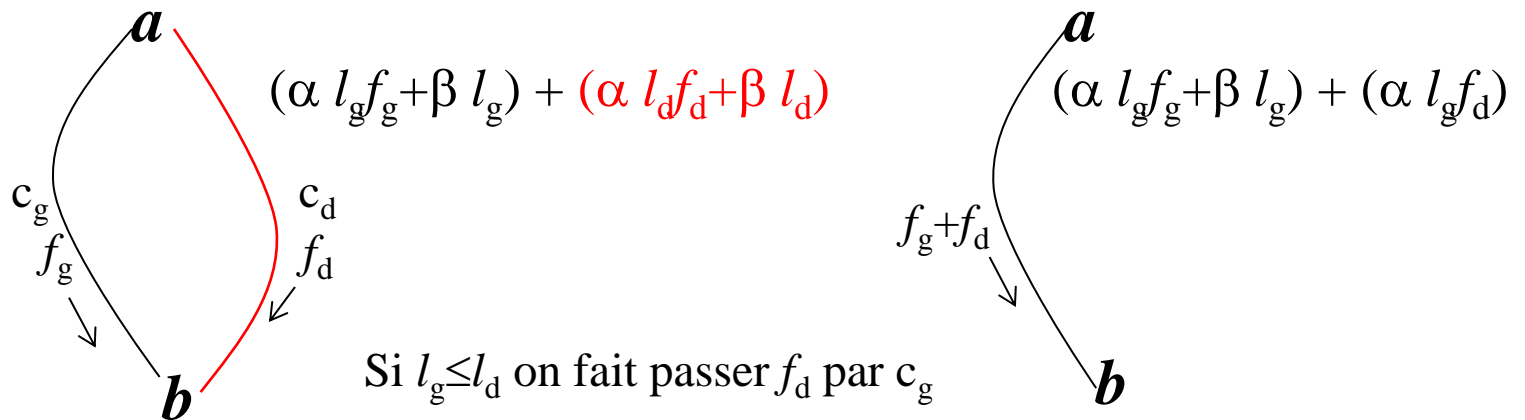
Réseau primaire et localisation des transformateurs (triangles)



réseau secondaire et demande sur chaque transformateur

Cas où $M = \sum_i d_i$ i.e. la capacité d'un arc (primaire ou secondaire) est suffisante pour supporter toute la demande

Si les coûts d'arcs et de flots sont proportionnels à la distance alors réseaux primaire et secondaire ne contiennent pas de cycle (arborescence)



l_g longueur du chemin c_g de a vers b , l_d longueur du chemin c_d de a vers b

f_g flot de a vers b passant par c_g , f_d flot de a vers b passant par c_d

Si $l_g \leq l_d$ alors il est plus économique de faire passer f_d par le chemin c_g
Et on peut enlever les arcs installés sur c_d

Relaxation lagrangienne

On relâche les contraintes couplantes

décomposition en 3 sous-pbs indépendants en f , en x , en z

$$\min \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij,1} x_{ij,1} + c_{ij,2} x_{ij,2} + d_{ij,1} f_{ij,1} + d_{ij,2} f_{ij,2}) + \sum_{i \in V} c_i z_i$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{(j,i) \in A} f_{ji,1} - \sum_{(i,j) \in A} f_{ij,1} = \begin{cases} f_i - \sum_{k \in V} d_k & i = r \\ f_i & \forall i \in V \setminus \{r\} \end{cases} \\ f_i + \sum_{(j,i) \in A} f_{ji,2} - \sum_{(i,j) \in A} f_{ij,2} = d_i & \forall i \in V \\ x_{ij,1}, x_{ij,2}, z_i \in \{0,1\}, & \forall (i,j) \in A, \forall i \in V \\ f_i \geq 0, f_{ij,1} \geq 0, f_{ij,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$f_i - s z_i \leq 0 \quad \times v_i \geq 0 \quad \forall i \in V$$

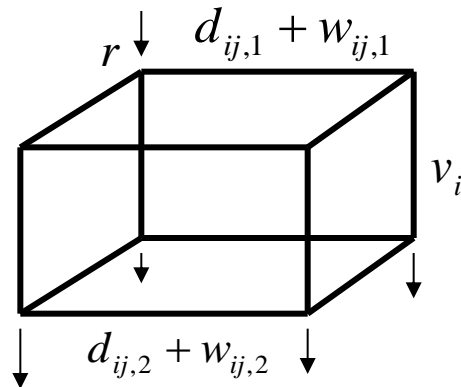
$$f_{ij,1} - M x_{ij,1} \leq 0 \quad \times w_{ij,1} \geq 0, \quad f_{ij,2} - M x_{ij,2} \leq 0 \quad \times w_{ij,2} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

Problème LR1

$$z_{LR1}(w, v) = \min \sum_{(i,j) \in A} \left((d_{ij,1} + w_{ij,1}) f_{ij,1} + (d_{ij,2} + w_{ij,2}) f_{ij,2} \right) + \sum_{i \in V} v_i f_i$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{(j,i) \in A} f_{ji,1} - \sum_{(i,j) \in A} f_{ij,1} = \begin{cases} f_i - \sum_{k \in V} d_k & i = r \\ f_i & \forall i \in V \setminus \{r\} \end{cases} \\ f_i + \sum_{(j,i) \in A} f_{ji,2} - \sum_{(i,j) \in A} f_{ij,2} = d_i & \forall i \in V \\ f_i \geq 0, f_{ij,1} \geq 0, f_{ij,2} \geq 0 & \forall (i,j) \in A, \forall i \in V \end{cases}$$

Problème de plus courts chemins de r aux sommets demandes



Problème LR2

$$z_{LR2}(w) = \min \sum_{(i,j) \in A} \left((c_{ij,1} - Mw_{ij,1})x_{ij,1} + (c_{ij,2} - Mw_{ij,2})x_{ij,2} \right)$$

s.c. $\{x_{ij,1}, x_{ij,2} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A$

Problème LR3

$$z_{LR3}(v) = \min \sum_{i \in V} (c_i - sv_i)z_i$$

s.c. $\{z_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in V$

Résolus par inspection des coefficients

Maximisation de la fonction duale

La fonction duale est $\theta(w, v) = z_{LR1}(w, v) + z_{LR2}(w) + z_{LR3}(v)$

Comme on a relâché des contraintes, $\theta(w, v)$ est toujours inférieure ou égale à la valeur du pb initial .

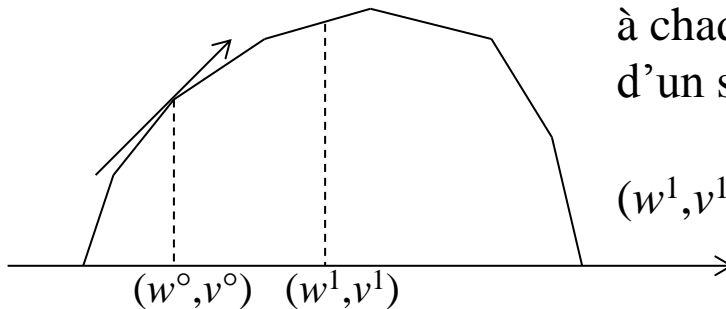
On cherche maintenant à trouver le meilleur (w, v) .

C'est le problème dual: maximiser $\theta(w, v)$ s.c. $(w, v) \geq 0$

Pour maximiser la fonction duale (qui est concave) on peut utiliser un algorithme de sous-gradient.

Un sous-gradient de θ en (w°, v°) est un vecteur g t.q.

$$\theta(w, v) \leq \theta(w^\circ, v^\circ) + g \bullet ((w, v) - (w^\circ, v^\circ)) \quad \forall (w, v)$$



à chaque itération on se déplace dans la direction d'un sous-gradient de θ en le point courant (w°, v°)

$$(w^1, v^1) = (w^\circ, v^\circ) + \rho g \quad (\rho \text{ scalaire positif})$$

Rappel dualité lagrangienne

$$\min_x f(x) \text{ s. c. } g(x) \leq 0$$

Fonction duale:

$$\theta(\lambda) = \min_x f(x) + \lambda \bullet g(x)$$

Soit x^* t.q. $\theta(\lambda) = f(x^*) + \lambda \bullet g(x^*)$

$$\theta(\lambda') \leq f(x^*) + \lambda' \bullet g(x^*)$$

Ce qui entraine $\theta(\lambda') - \theta(\lambda) \leq (\lambda' - \lambda) \bullet g(x^*)$

$$\theta(\lambda') \leq \theta(\lambda) + (\lambda' - \lambda) \bullet g(x^*)$$

donc $g(x^*)$ est un sous-gradient de θ

On obtient un sous-gradient de la fonction duale à partir des contraintes relâchées.
 Soit f^* , x^* , z^* solutions de LR1, LR2, LR3

$$\vec{g} = \begin{cases} f_{i,j,1}^* - Mx_{i,j,1}^* & \text{coordonnée } w_{ij,1} \\ f_{i,j,2}^* - Mx_{i,j,2}^* & \text{coordonnée } w_{ij,2} \\ f_i^* - sz_i^* & \text{coordonnée } v_i \end{cases}$$

g donne la direction de déplacement dans la méthode de sous - gradient

$$\begin{pmatrix} w_{ij,1} \\ w_{ij,2} \\ v_i \end{pmatrix}^h \xrightarrow{\vec{g}} \begin{pmatrix} w_{ij,1} \\ w_{ij,2} \\ v_i \end{pmatrix}^{h+1}$$

$\rho^h \vec{g}$

Si des variables duales deviennent <0
 dans le vecteur $h+1$ on les met à 0

$$\begin{pmatrix} w_{ij,1} \\ w_{ij,2} \\ v_i \end{pmatrix}^{h+1} = \begin{pmatrix} w_{ij,1} \\ w_{ij,2} \\ v_i \end{pmatrix}^h + \rho^h \vec{g} \quad \rho^h \text{ pas à l'itération } h \quad \rho^h \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow \infty$$

Relaxation lagrangienne et relaxation continue

Dans LR2 et LR3 on peut relâcher la condition d'intégrité sur x et z sans changer la valeur optimum de LR2 et LR3.

Il en résulte que la relaxation lagrangienne donne la même borne inférieure que la relaxation continue.

Heuristique lagrangienne

L'intérêt de la relaxation lagrangienne réside plus ici dans l'obtention de solution réalisable (borne supérieure) à partir de la solution fournie par le problème dual.

Par exemple, si M et s sont des capacités égales à la somme des demandes, à partir du flot f^* solution de LR1 on obtient facilement une solution du problème en mettant des arcs et des transformateurs là où passe le flot.

Cas particuliers -Variantes

Pas de transformateurs ou de coûts suffisamment faibles pour qu'on puisse les négliger
 Deux technologies mais un seul type de technologie par arc

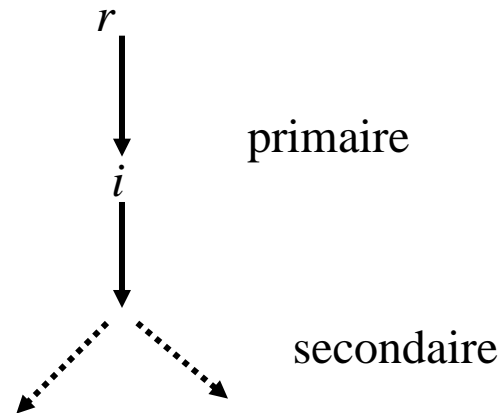
$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{\substack{(i,j) \in A \\ t=1,2}} (c_{ij,t} x_{ij,t} + \sum_{k \in D} d_{ij,t}^k f_{ij,t}^k) \\
 \text{s.c.} \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{(j,i) \in A} \sum_{t=1,2} f_{ji,t}^k - \sum_{(i,j) \in A} \sum_{t=1,2} f_{ij,t}^k = \begin{cases} d_i & i = k \in D \\ -d_k & i = r, k \in D \\ 0 & i \in V \setminus \{r\}, k \in D \setminus \{i\} \end{cases} \\
 & 0 \leq f_{ij,t}^k \leq d_k x_{ij,t} \quad \forall (i,j) \in A, \forall t = 1, 2, \forall k \in D \\
 & x_{ij,1} + x_{ij,2} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A \quad (\text{au plus une technologie par arc}) \\
 & \sum_{(i,k) \in A} (x_{ik,1} + x_{ik,2}) = 1 \quad \forall k \in D \quad (\text{un client est nécessairement desservi par une technologie}) \\
 & \sum_{(l,i) \in A} x_{li,1} \geq x_{ij,1} \quad \forall (i,j) \in A, i \neq r \quad (\text{connectivité primaire}) \\
 & x_{ij,1}, x_{ij,2} \in \{0,1\}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Modèle multiflot désagrégé (un flot par technologie) similaire à DMCF
 technologie \Leftrightarrow module

Connectivité primaire:

le réseau primaire (formé des arcs de technologie 1) doit être connexe.

Dans ce modèle, les flots de technologie 1 et 2 circulant sur un même niveau, on est obligé de rajouter des contraintes pour avoir la propriété de connexité du réseau primaire.



Nombre de variables de flot

Le modèle comporte beaucoup de variables f : arcs \times clients \times technologies

Il y a un intérêt à les éliminer et à les faire intervenir par des coupes

C'est la méthode de décomposition de Benders

Décomposition de Benders

Pour x fixé, le problème se décompose en plusieurs sous-problèmes un par commodité k .

- Sous-problème k = plus court chemin de r au nœud de demande k

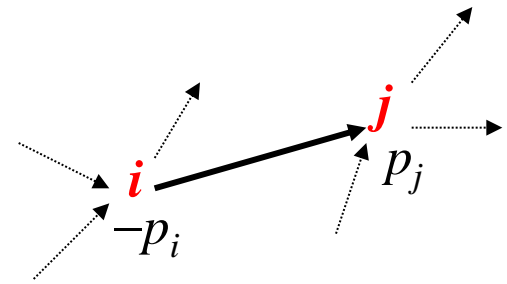
$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{t=1,2} d_{ij,t}^k f_{ij,t}^k$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{(j,i) \in A} \sum_{t=1,2} f_{ji,t}^k - \sum_{(i,j) \in A} \sum_{t=1,2} f_{ij,t}^k = \begin{cases} d_i & i = k \in D \\ -d_k & i = r \\ 0 & i \in V \setminus \{r, k\} \end{cases} & \text{var. duale } p_i \\ 0 \geq -f_{ij,t}^k \geq -d_k x_{ij,t} \quad \forall (i, j) \in A, \forall t = 1, 2 & \text{var. duale } \alpha_{ij,t} \end{cases}$$

- Dual

$$\max -d_k p_r^k + d_k p_k^k - \sum_{t=1,2} d_k x_{ij,t} \alpha_{ij,t}^k$$

$$s.c. \begin{cases} p_j^k - p_i^k - \alpha_{ij,t}^k \leq d_{ij,t}^k \quad \forall (i, j) \in A, \forall t = 1, 2 \\ \alpha_{ij,t}^k \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \forall t = 1, 2 \\ p_i^k \geq 0 \text{ ou } \leq 0 \quad \forall i \in V \end{cases}$$



Lorsque x définit une arborescence la solution du dual est immédiate car il n'y a qu'un seul chemin pour aller de r au client k

On note C^k le chemin de r à k dans l'arborescence

$$p_r^k = 0$$

$$p_j^k = p_i^k + d_{ij,1}^k \text{ si } (i,j) \in C^k \text{ et } x_{ij,1} = 1$$

$$p_j^k = p_i^k + d_{ij,2}^k \text{ si } (i,j) \in C^k \text{ et } x_{ij,2} = 1$$

$$p_j^k = 0 \text{ sinon}$$

$$\alpha_{ij,1}^k = 0 \text{ si } (i,j) \in C^k \text{ et } x_{ij,1} = 1$$

$$\alpha_{ij,1}^k = \max \{0, p_j^k - p_i^k - d_{ij,1}^k\} \text{ sinon}$$

$$\alpha_{ij,2}^k = 0 \text{ si } (i,j) \in C^k \text{ et } x_{ij,2} = 1$$

$$\alpha_{ij,2}^k = \max \{0, p_j^k - p_i^k - d_{ij,2}^k\} \text{ sinon}$$

Problème maître

$$\min \sum_{\substack{(i,j) \in A \\ t=1,2}} c_{ij,t} x_{ij,t} + \gamma$$

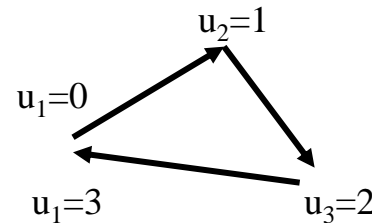
$$s.c. \begin{cases} \gamma \geq \sum_{k \in D} d_k \left(p_k^{k,h} - \sum_{(i,j) \in A} \sum_{t=1,2} \alpha_{ij,t}^{k,h} x_{ij,t} \right) \quad \forall h \text{ (coupes de Benders)} \\ x_{ij,1} + x_{ij,2} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A \\ \sum_{(i,k) \in A} (x_{ik,1} + x_{ik,2}) = 1 \quad \forall k \in D \\ \sum_{(l,i) \in A} x_{li,1} \geq x_{ij,1} \quad \forall (i,j) \in A \quad \text{(connectivité primaire)} \\ x_{ij,1}, x_{ij,2} \text{ binaire} \end{cases}$$

Les contraintes de flot ayant disparu, on n'est pas certain que x donne une arborescence à chaque itération h (présence de circuits)

On peut cependant rajouter des contraintes qui garantissent qu'on aura toujours une arborescence : contraintes Miller-Tucker-Zemlin

$$|V| x_{ij} + u_i - u_j \leq |V| - 1$$

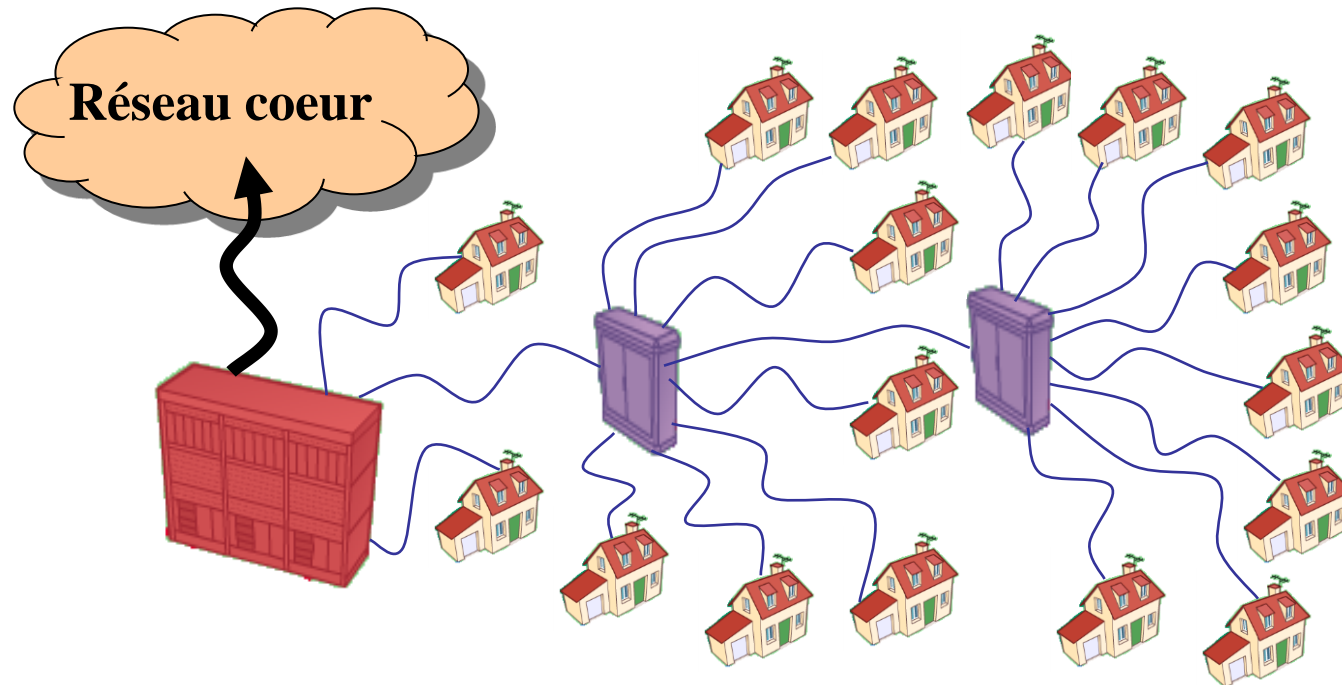
$$\text{en posant } x_{ij} = x_{ij,1} + x_{ij,2}$$



Réseaux d'accès en fibres optiques - Fiber To The Home

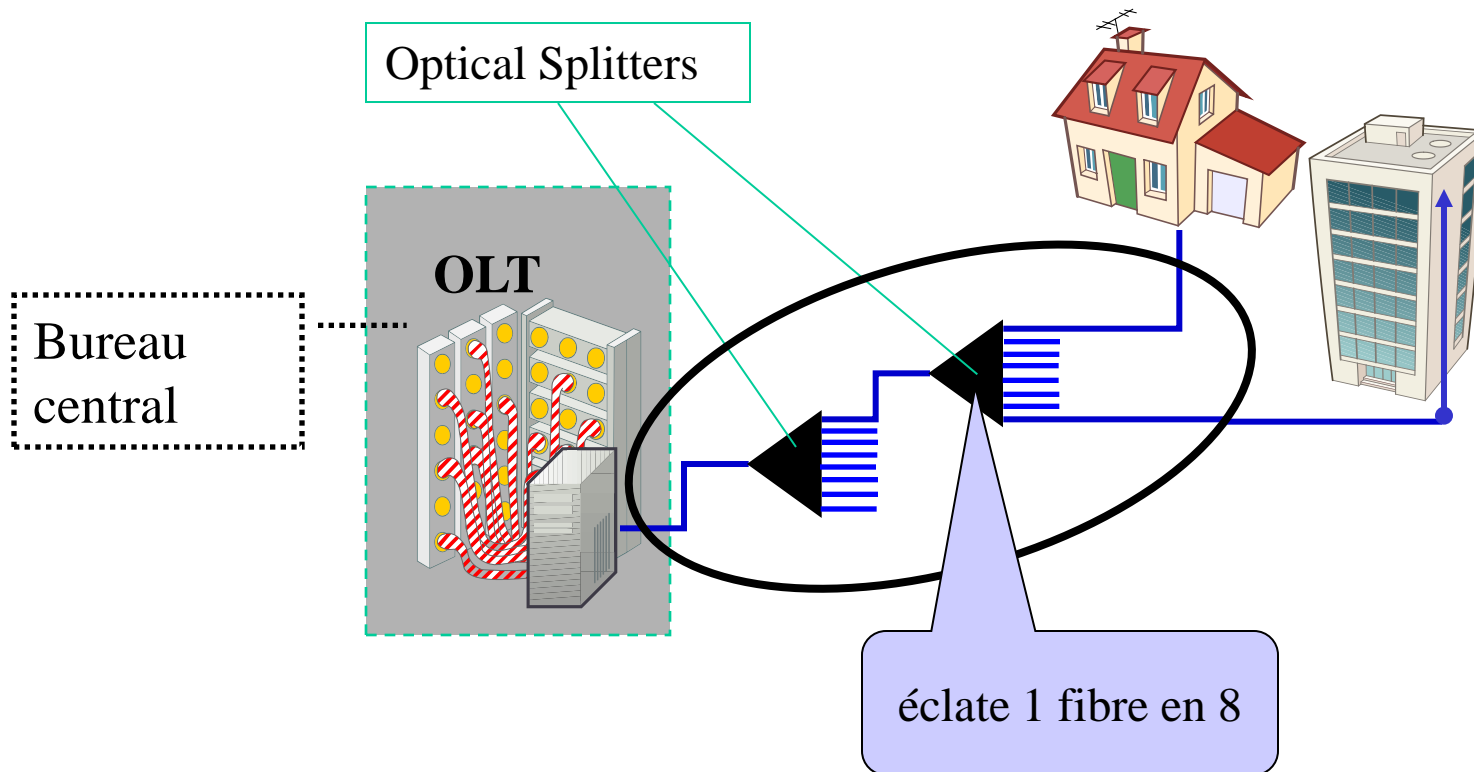
Contexte

- Réseau d'accès: réseau hiérarchique qui relie les clients au réseau coeur
- Equipements: bureau central, coupleurs optiques « splitters », fibres optiques



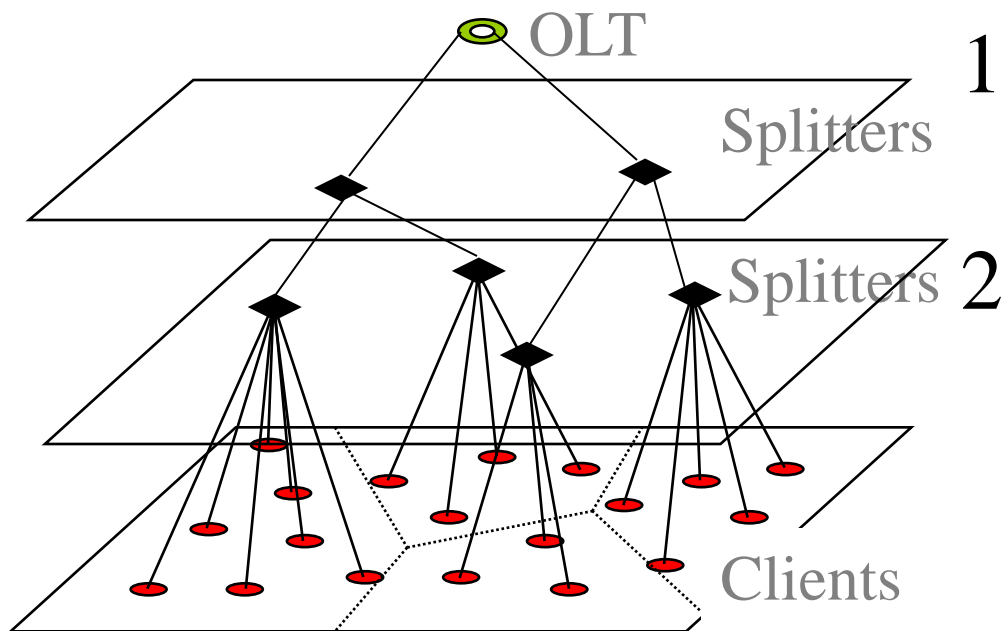
Architecture

- Architecture GPON (Gigabit Passive Optical Network)
 - Optical Line Termination connecte les clients
 - 2 niveaux de splitters distribuent les fibres aux clients



Réseau hiérarchique

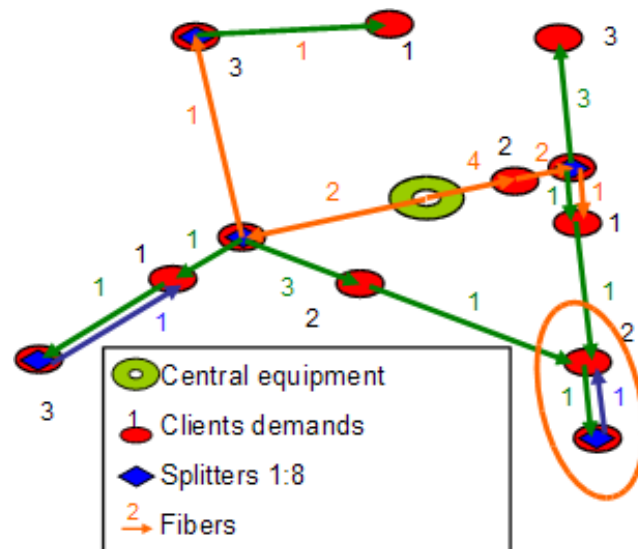
- OLT = bureau central
- splitters = équipements passifs intermédiaires sur 2 niveaux



structure d'arbre
pour les splitters

Graphe d'infrastructure

- Localiser les équipements dans un graphe qui modélise les conduites dans une ville
 - localiser les splitters aux nœuds (2 niveaux de splitters)
 - Router les fibres reliant OLT, splitters et clients



Les fibres peuvent induire des cycles

Les données

- **graphe** modélisant une zone locale
- **capacité** sur chaque arête (nombre maximum de fibres parcourant l'arête)
- **demandes** en fibre des clients (les clients sont sur les nœuds)
- « **noeud 0** » lieu du bureau central

Les données

C^k cost of a level k splitter

l_{ij} length of the edge $[i, j]$

γ^k linear cost of a level k fiber

d_{ij}^k cost of a level k fiber on the edge $[i, j]$, $d_{ij}^k = l_{ij}\gamma^k$

m^k number of fibers produced by a level k splitter

a_i demand in fibers of the clients at node i

b_{ij} capacity of the edge $[i, j]$

Les variables du problème

z_i^k number of level k splitters installed at node i

f_{ij}^k number of level k fibers routed on edge $[i, j]$

u_i^k number of unused fibers of level k at node i

Modèle: programme linéaire en nombres entiers

$$\min_{f,z,u} \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^2 C^k z_i^k + \sum_{[i,j] \in E} \sum_{k=1}^3 d_{ij}^k (f_{ij}^k + f_{ji}^k)$$

$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j/[j,i] \in E} f_{ji}^1 = z_i^1 + \sum_{j/[i,j] \in E} f_{ij}^1 & i = 1, \dots, n \quad (1) \\ \sum_{j/[j,i] \in E} f_{ji}^2 + m^1 z_i^1 = z_i^2 + \sum_{j/[i,j] \in E} f_{ij}^2 + u_i^2 & i = 0, \dots, n \quad (2) \\ \sum_{j/[j,i] \in E} f_{ji}^3 + m^2 z_i^2 = a_i + \sum_{j/[i,j] \in E} f_{ij}^3 + u_i^3 & i = 0, \dots, n \quad (3) \\ \sum_{k=1}^3 (f_{ij}^k + f_{ji}^k) \leq b_{ij} & [i, j] \in E \quad (4) \\ z_i^k, u_i^k, f_{ij}^k \text{ integer} & \end{array} \right.$$

Modèle similaire au problème à 2 niveaux vu précédemment sauf qu'ici

- les flots de niveau k sont multipliés par un facteur m^k quand ils passent au niveau $k+1$
- les clients sont alimentés en fibres de niveau 3
- les arcs sont déjà construits

Inégalités valides

Q ensemble de points $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases} \beta x + y \geq \alpha \\ x, y \text{ entiers} \end{cases}$ avec β, α entiers

division entière de α par β : $\alpha = q \times \beta + r$ avec $0 \leq r < \beta$

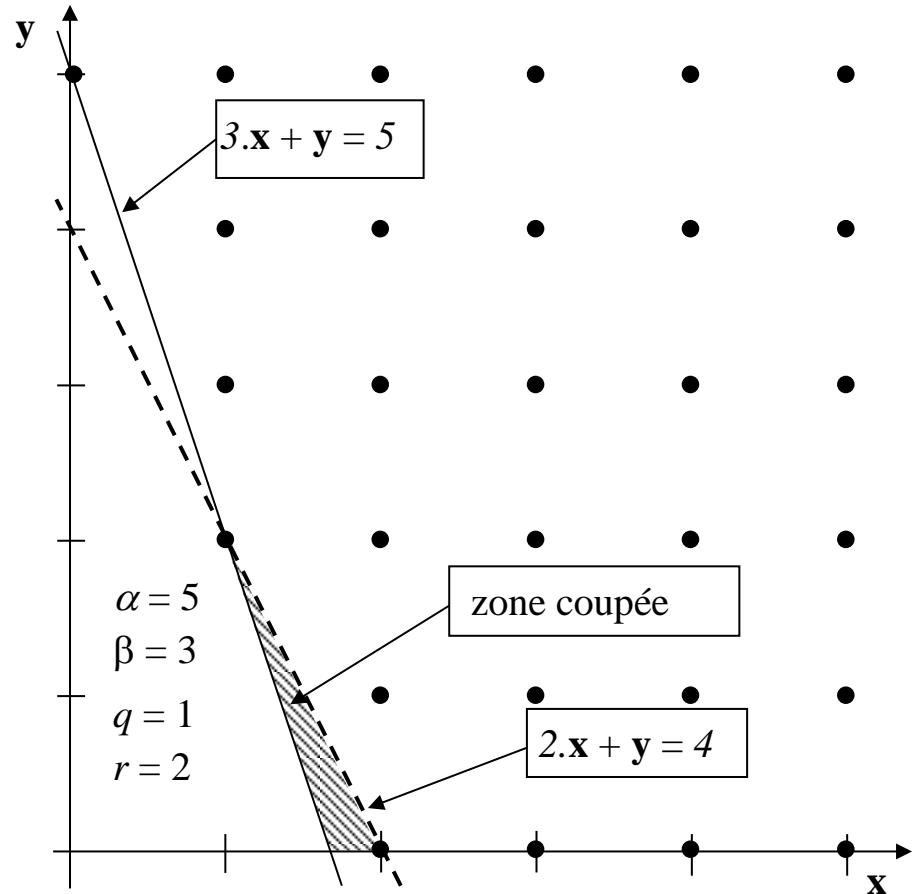
Alors $rx + y \geq r(q + 1)$ est valide pour Q

Un exemple

$$\begin{cases} \beta x + y \geq \alpha \\ x, y \text{ entiers} \end{cases}$$

$$\alpha = q \times \beta + r$$

$$rx + y \geq r(q + 1)$$



Comment utiliser ces inégalités dans notre problème?

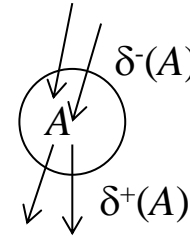
Soit un ensemble de noeuds A . Nous additionnons les équations (3) pour $i \in A$

$$\sum_{j/[j,i] \in E} f_{ji}^3 + m^2 z_i^2 = a_i + \sum_{j/[i,j] \in E} f_{ij}^3 + u_i^3 \quad i \in A$$

$$\sum_{i \in A} \left(\sum_{j \notin A/[j,i] \in E} f_{ji}^3 + m^2 z_i^2 \right) = \sum_{i \in A} \left(a_i + \sum_{j \notin A/[i,j] \in E} f_{ij}^3 + u_i^3 \right)$$

$$\sum_{i \in A} \left(\sum_{j \notin A/[j,i] \in E} f_{ji}^3 \right) + m^2 \sum_{i \in A} z_i^2 \geq \sum_{i \in A} a_i$$

Agrégation de contraintes



Nous posons

$$x = \sum_{i \in A} z_i^2, \quad y = \sum_{i \in A} \left(\sum_{j \notin A/[j,i] \in E} f_{ji}^3 \right), \quad \beta = m^2, \quad \alpha = \sum_{i \in A} a_i$$

Avec

$$\beta x + y \geq \alpha$$

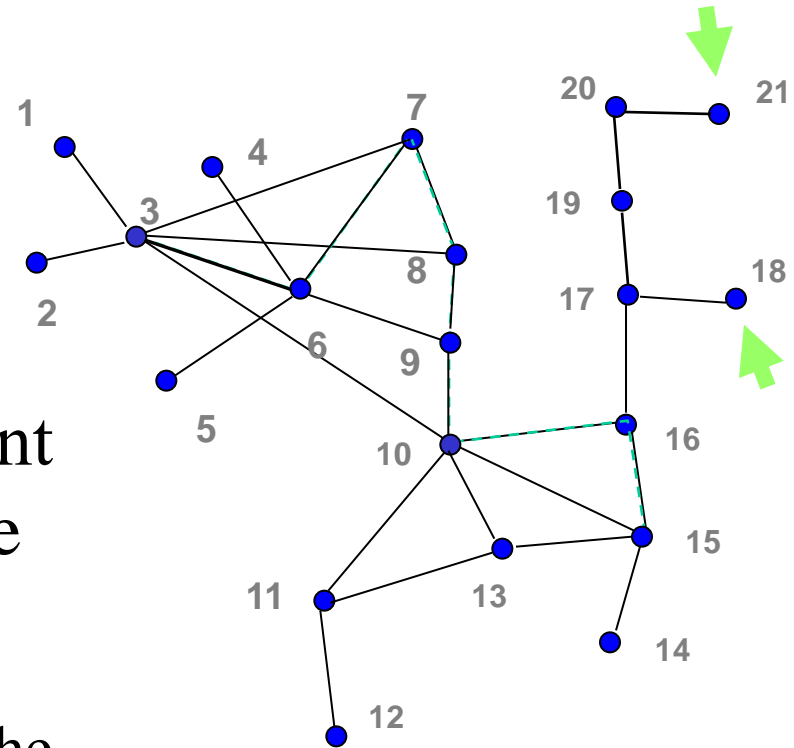
Nous obtenons une inégalité valide

$$rx + y \geq r(q + 1)$$

Génération d'une inégalité valide

Réduction du graphe

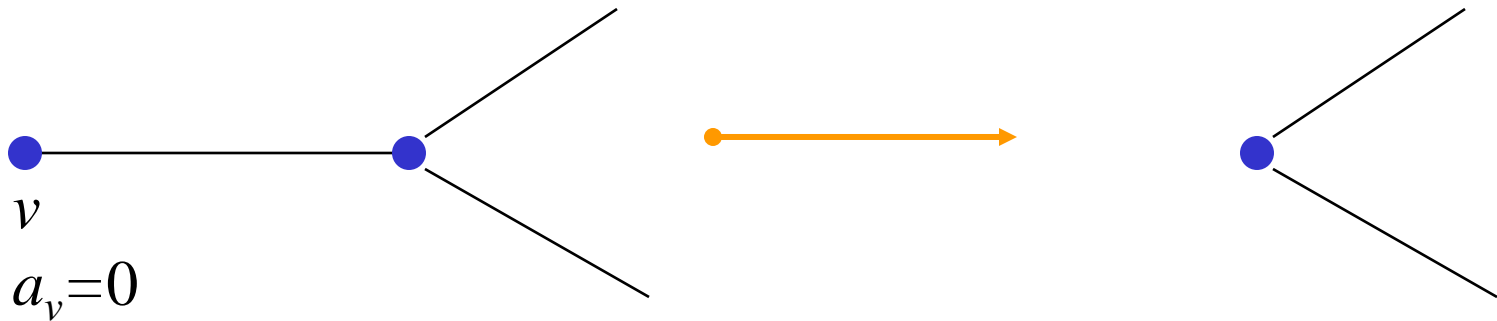
- Beaucoup nœuds sans clients (nœuds géographiques)
- certains d'entre eux ne sont pas utiles pour optimiser le déploiement
- Ils peuvent être retirés du graphe



Réduction du graphe

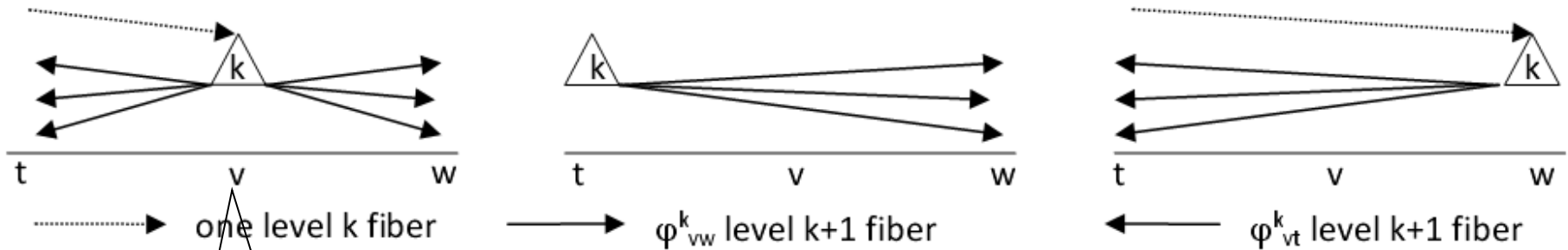
réduction évidente

Une feuille du graphe (nœud de degré 1) sans demande peut être retirée



Réduction du graphe

Nœuds de degré 2 et de demande nulle



Noeud v avec 2 voisins
t.q. $a_v = 0$

On met le splitter sur l'un des voisins
La solution n'est pas plus coûteuse
On peut supprimer v

Réduction du graphe

Theorem

If the linear costs of fibers of two levels k and k' satisfy $\gamma^k \leq 2\gamma^{k'}$ ($k, k'=1,2,3$)

then there is an optimal solution with no splitter on any node v of degree 2

with $a_v = 0$ (no demand)

Si les coûts de fibres de niveaux différents sont relativement homogènes
à savoir :

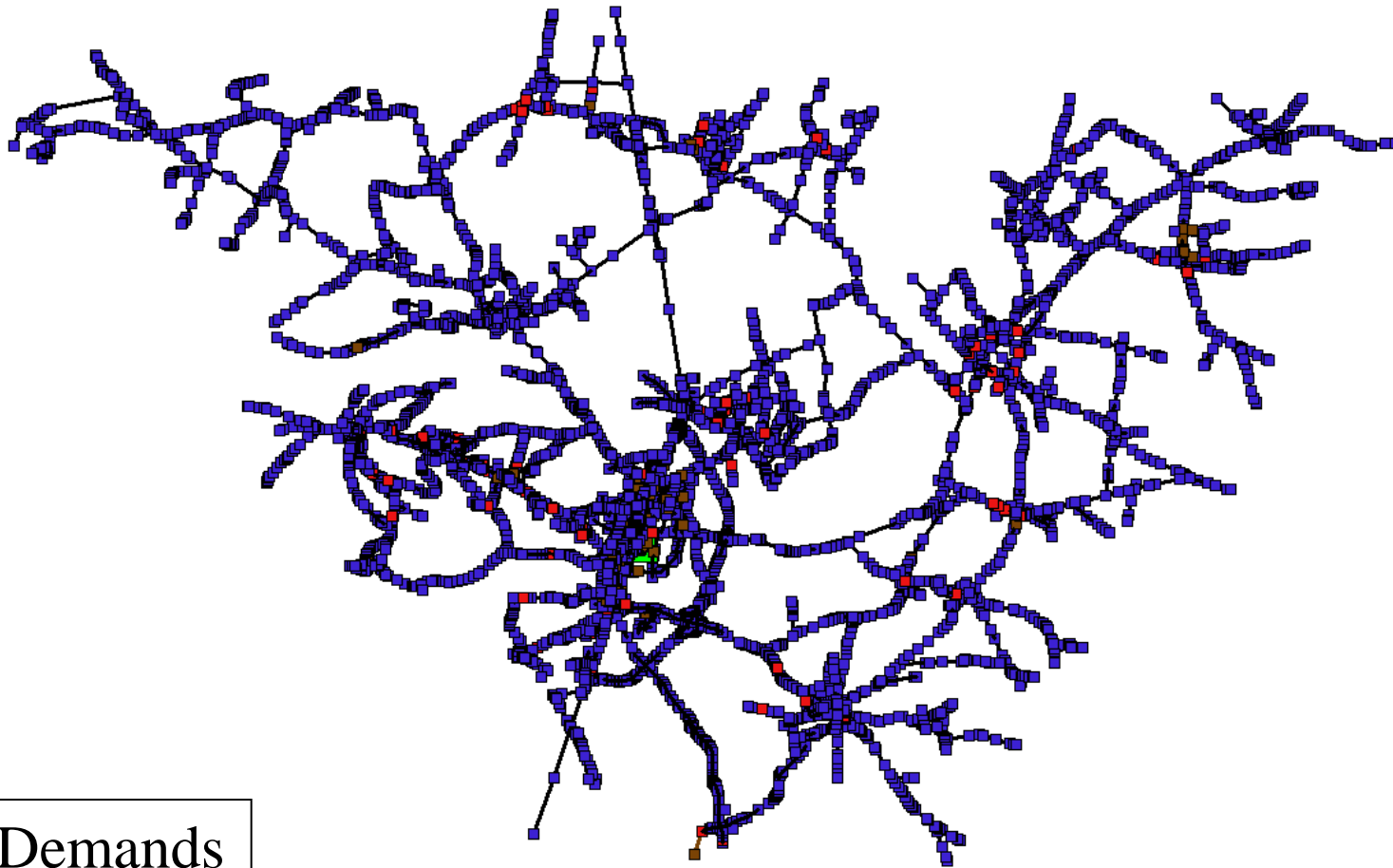
le plus grand coût de fibres ne dépasse pas 2 fois le plus petit coût

alors on peut supprimer un nœud de demande nulle car on y installera jamais
un splitter

Résultats numériques

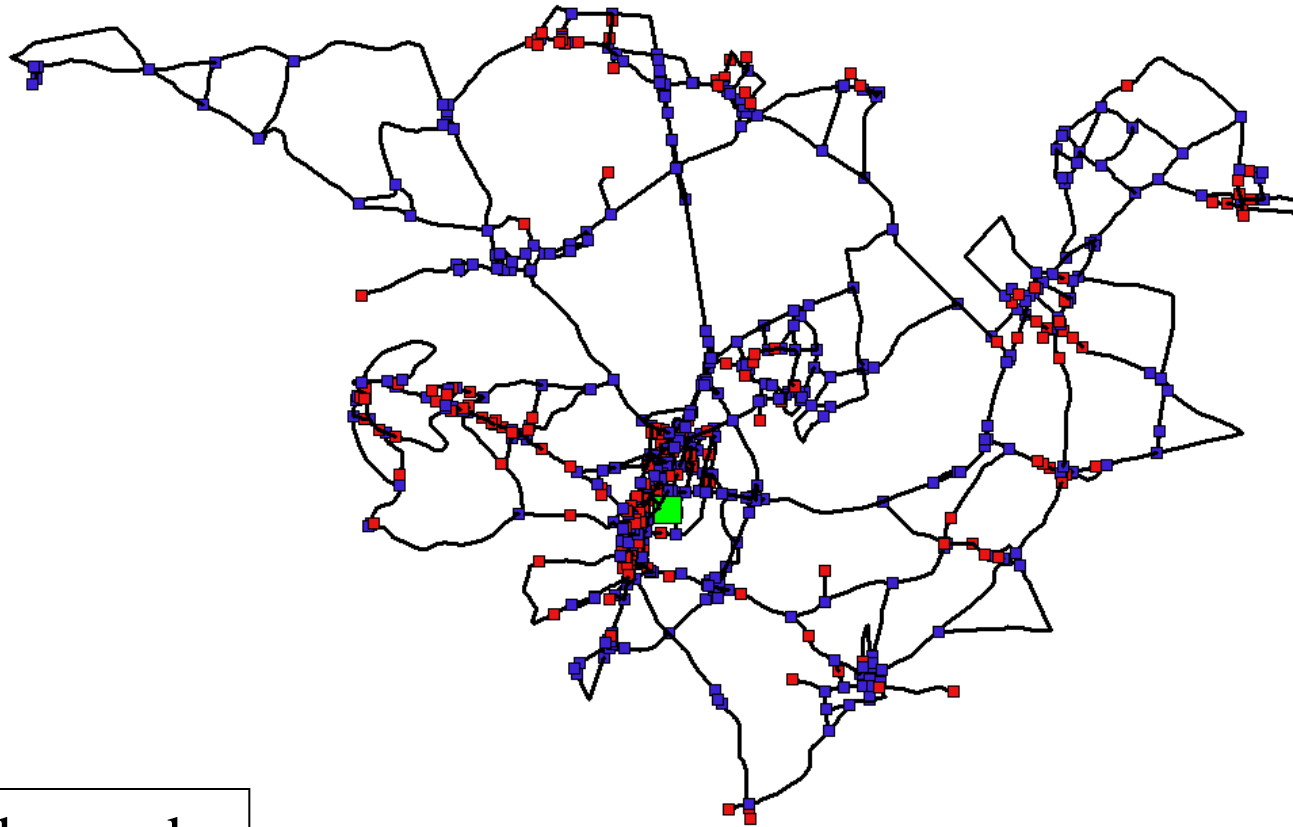
Instances réelles

Instance	Existing infrastructure		Fiber demand	
	$ V $	$ E $	nb_{Client}	d_{Client}
Data_1	342	375	184	72.7
Data_2	920	1000	570	73.0
Data_3	1072	1163	667	78.2
Data_4	932	951	583	75.9
Data_5	1478	1614	1010	77.2
Data_6	712	772	441	82.6
Data_7	3044	3337	2061	79.0
Data_8	1265	1365	497	26.2
Data_9	2853	3139	1301	25.2
Data_10	844	905	327	21.1
Data_11	2076	2280	973	24.7
Data_12	901	996	347	24.1
Data_13	181	218	46	31.7
Data_14	3276	3639	1652	25.9



- Demands
- nodes
- OLT

Un graphe représentant une localité avant réduction



- demands
- nodes
- OLT

Le graphe après réduction

Résultats numériques

Synthèse des résultats (après une heure)

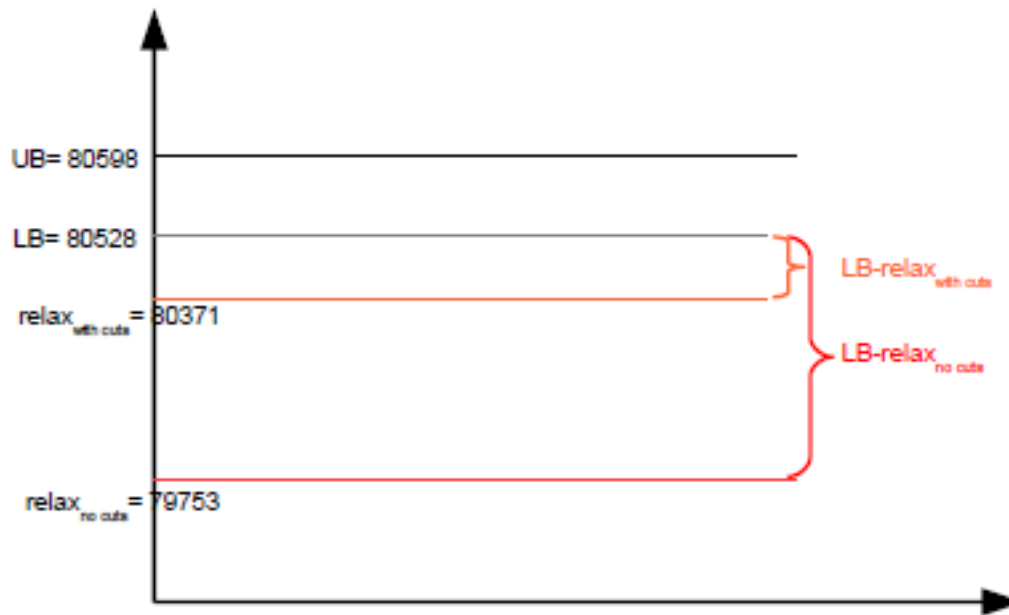
Instance	Size (B&B tree)	UB	LB	Gap (%)
Data_1	616009	80598	80528	0.08
Data_2	876711	257089	256324	0.30
Data_3	954926	302175	301203	0.32
Data_4	702446	265894	265249	0.24
Data_5	598893	452732	451166	0.35
Data_6	11729991	199857	199434	0.21
Data_7	283240	931339.6	922673	0.93
Data_8	538494	158896	156673	1.40
Data_9	209571	383986	377728	1.63
Data_10	662166	88318	87050	1.44
Data_11	291528	281501	276454	1.79
Data_12	633018	106634	105340	1.20
Data_13	1039895	21163	20902	0.57
Data_14	138503	504803	496829	1.58

moyenne gap = 0.35%

moyenne gap = 1.37%

Résultats numériques

Réduction du gap par les inégalités valides



$$\text{gap}_{\text{LB}} = (\text{relax}_{\text{with cuts}} - \text{relax}_{\text{no cut}}) / (\text{LB} - \text{relax}_{\text{no cut}})$$

Résultats numériques

Impact des inégalités valides

Instance	UB	LB	Continuous relaxation			% Gap closed	
			relax _{no cuts}	relax _{with cuts}	gap (%)	gap _{UB}	gap _{LB}
Data_1	80598	80528	79753	80371	0.8	73.1	79.7
Data_2	257089	256324	254210	256231	0.8	70.2	95.6
Data_3	302175	301203	298904	301094	0.7	67.0	95.3
Data_4	265894	265249	262716	265142	0.9	76.3	95.8
Data_5	452732	451166	446894	450731	0.9	65.7	89.8
Data_6	199857	199434	197653	199321	0.8	75.7	93.7
Data_7	931339	922673	914984	922567	0.8	46.4	98.6
Data_8	158896	156673	151955	156481	3.0	65.2	95.9
Data_9	383986	377728	370449	377614	1.9	52.9	98.4
Data_10	88318	87050	84433	86821	2.8	61.5	91.2
Data_11	281501	276454	271180	276352	1.9	50.1	98.1
Data_12	106634	105340	102805	105226	2.4	63.2	95.5
Data_13	21163	20902	20587	20902	1.5	54.7	100.0
Data_14	504803	496829	486279	496694	2.1	56.2	98.7

gap moyen fermé par les inégalités 57.7% 96.8%

Réseau d'accès en radiotéléphonie

Réseaux d'accès en radiotéléphonie

Les constituants:

BTS (Base Tranceiver Station) station de base (émetteur-récepteur)
c'est le lien avec le téléphone mobile

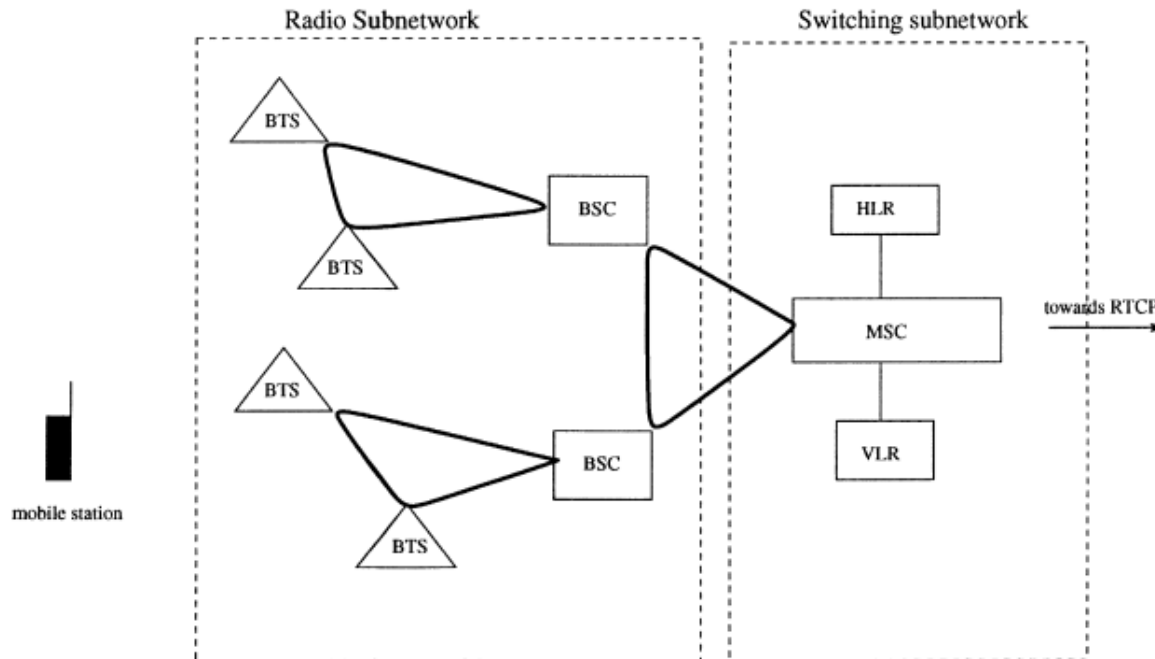
BSC (Base Station Controller) contrôleur de stations de base

Les BTS sont reliées aux BSC suivant une configuration en boucle basée sur la technologie SDH (Synchronous Digital Hierarchy). Liaison par fibre.

Un BTS est relié à un seul BSC.

BTS et BSC sont les constituants du sous-réseau radio

Les BSC sont reliés au sous-réseau de commutation (switching subnetwork).



Réseau d'accès en deux niveaux

Conception du sous-réseau radio

Les BTS sont déjà localisés

Il existe un ensemble d'emplacements possibles pour les BSC

Problématique:

Choisir la localisation des BSC et le nombre de BSC

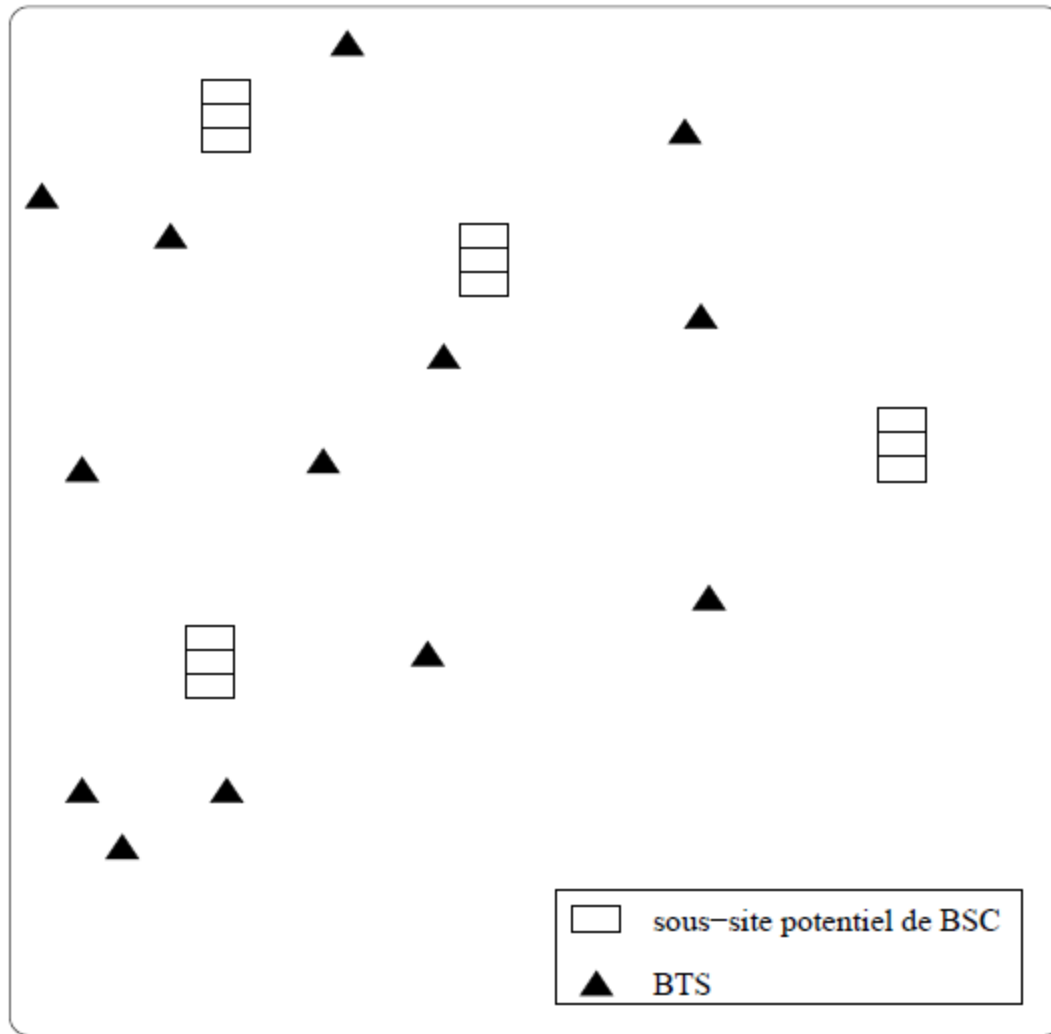
Allouer les BTS aux BSC

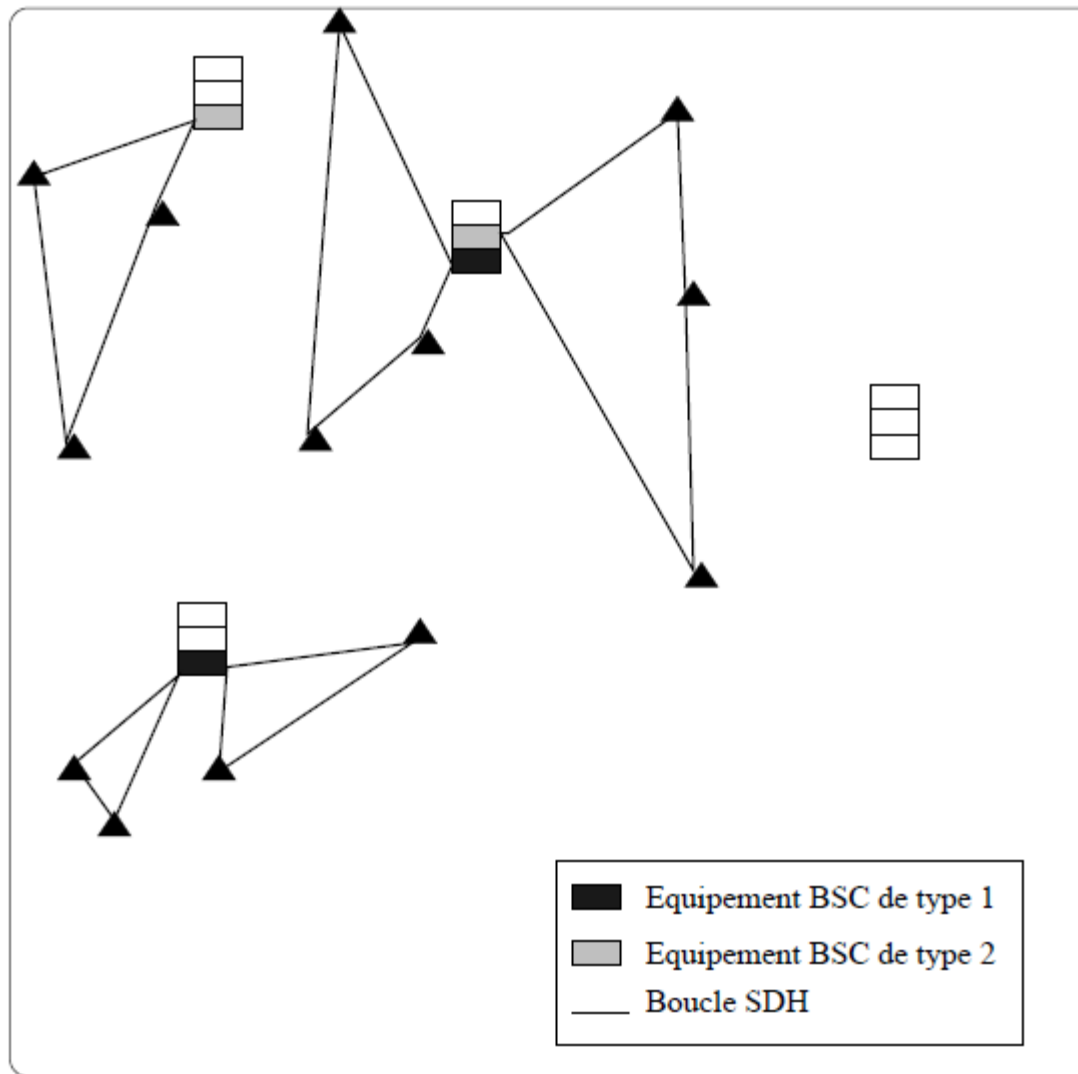
Construire les boucles de BTS

Equiper les BSC

Minimiser les coûts

Coûts		
BSC	Coût unitaire par BSC	Coût d'équipement d'un BSC
Boucles	Coût fixe par boucle	Coût linéaire fonction de la longueur





Une solution avec 3 sites ouverts et 5 boucles

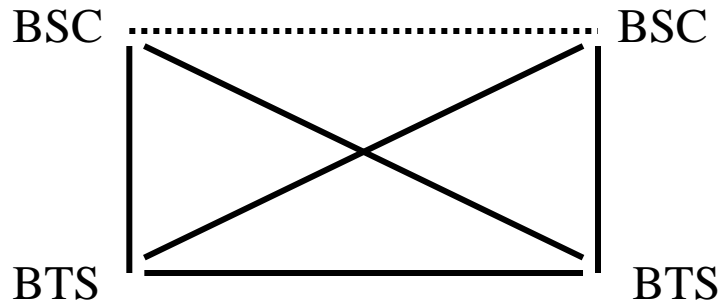
Heuristique en 3 phases

- 1- Choix des emplacements des BSC et allocation des BTS aux BSC
- 2- Construction des boucles de BTS autour de leur BSC
- 3- Equipement des BSC

1- Choix des emplacements des BSC et allocation des BTS aux BSC

Construction d'un graphe où BTS et BSC sont reliés par des arêtes de poids égal à leur distance. Les sommets trop éloignés ne sont pas reliés (distance max)

Les BSC sont reliés entre eux par des arêtes fictives de poids nul



Recherche d'un arbre couvrant poids minimum

Une fois l'arbre couvrant déterminé, on retire les arêtes fictives

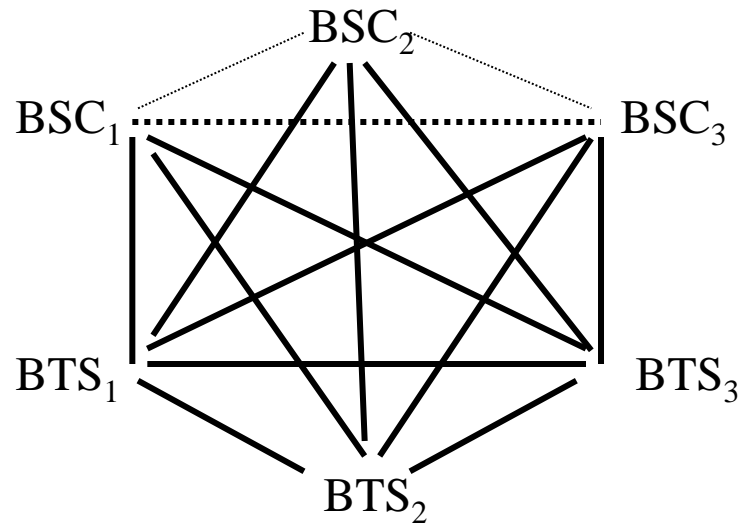
On obtient une forêt

Les BSC sans BTS sont éliminés

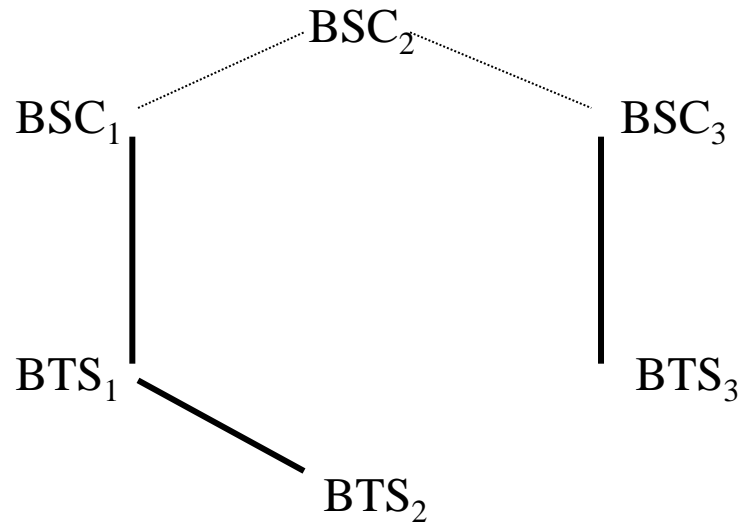
Les BTS sont allouées au BSC auxquels elles sont connectées

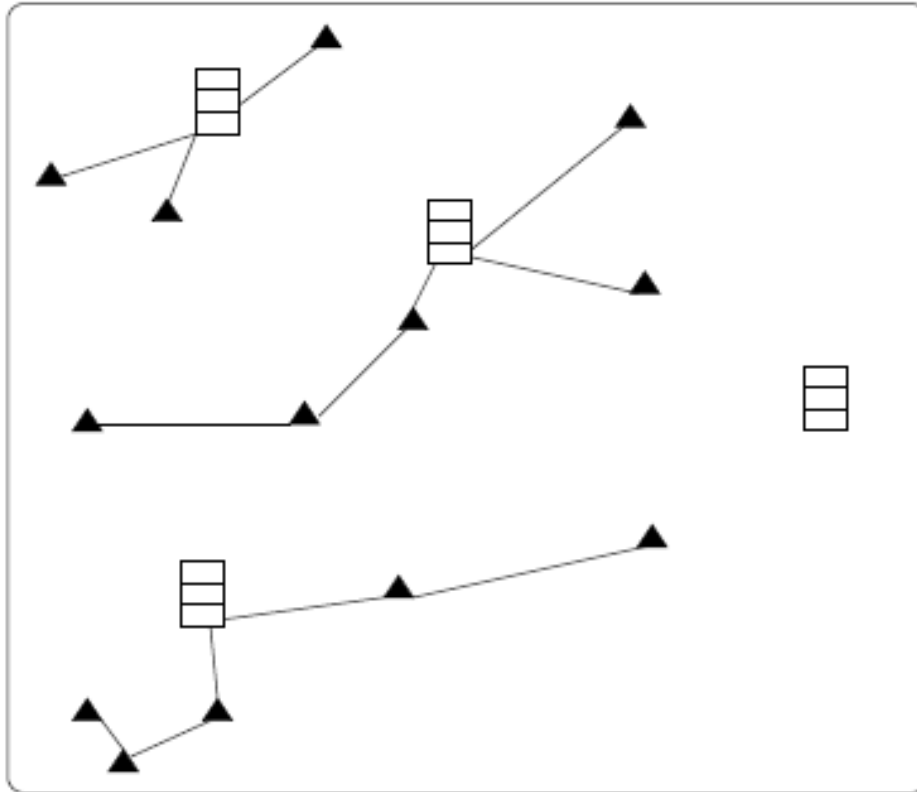
Exemple:

Graphe initial



Arbre couvrant
BSC₂ est éliminé





Forêt obtenue à la fin de la Phase 1 de l'heuristique

2- Construction des boucles de BTS autour de leur BSC

Problème de tournées de véhicule avec le BSC pour dépôt

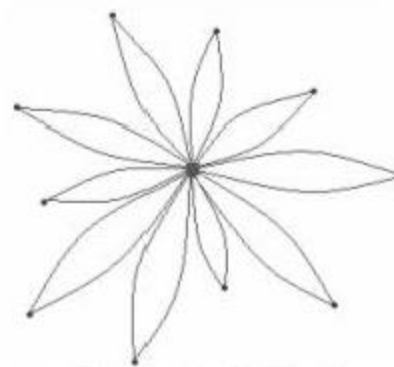
Contraintes :

chaque boucle contient un nombre limité de BTS (14 maxi.)

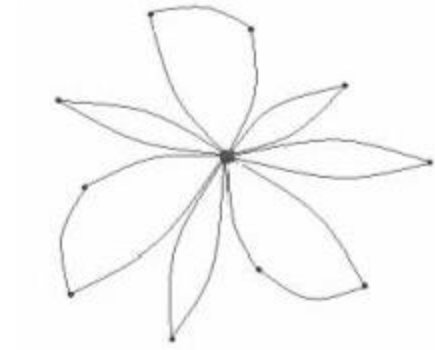
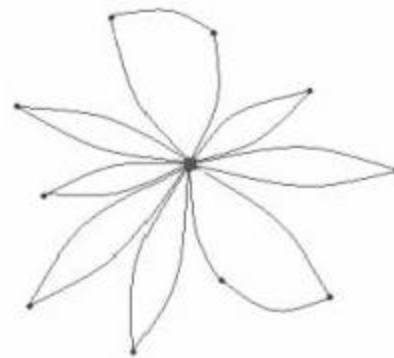
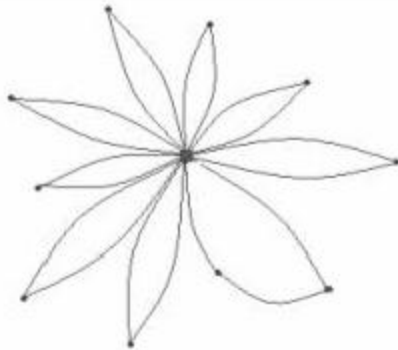
chaque boucle a une longueur limitée (100 km maxi.)

Résolution par méthode heuristique de Clarke et Wright

Heuristique de Clarke et Wright



Marguerite de départ



Fusions successives de tournées

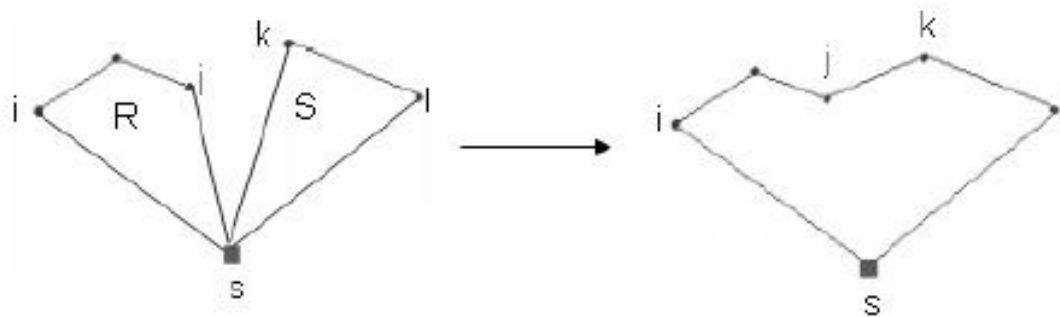
Heuristique Clarke et Wright.

Algorithme glouton basé sur une méthode de descente.

A chaque itération, on fusionne 2 tournées

Gain de la fusion de 2 tournées $G=c_{sj}+c_{sk}-c_{jk}$

A chaque itération, on fusionne les 2 tournées de plus gros gain



Pour chaque couple de tournée 4 possibilités. On choisit gain max.

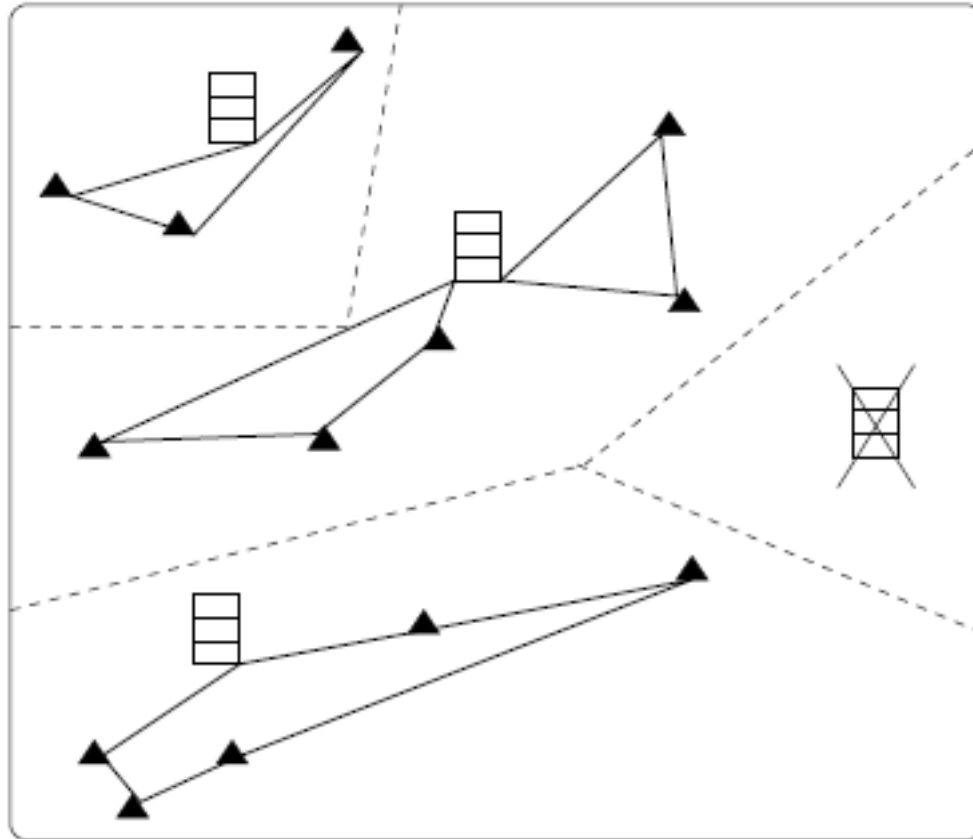
$$G_1=c_{sj}+c_{sk}-c_{jk}$$

$$G_2=c_{si}+c_{sk}-c_{ik}$$

$$G_3=c_{sj}+c_{sl}-c_{jl}$$

$$G_4=c_{si}+c_{sl}-c_{il}$$

On fusionne 2 tournées si les contraintes (longueur et nombre de BTS) sont respectées



Boucles SDH obtenues à la fin de la Phase 2 de l'heuristique

3- Equipement des BSC

Les BSC sont sub-divisés en NS sous-sites.

Chaque sous-site peut recevoir un équipement.

Il faut:

- allouer les boucles aux sous-sites (un sous-site peut recevoir plusieurs boucles)
- choisir les équipements des sous-sites (au plus un équipement par sous-site)

On dispose d'un ensemble d'équipement NT

chaque équipement w à une capacité Q_w et un coût M_w

Le nombre à disposition de chaque équipement n'est pas limité.

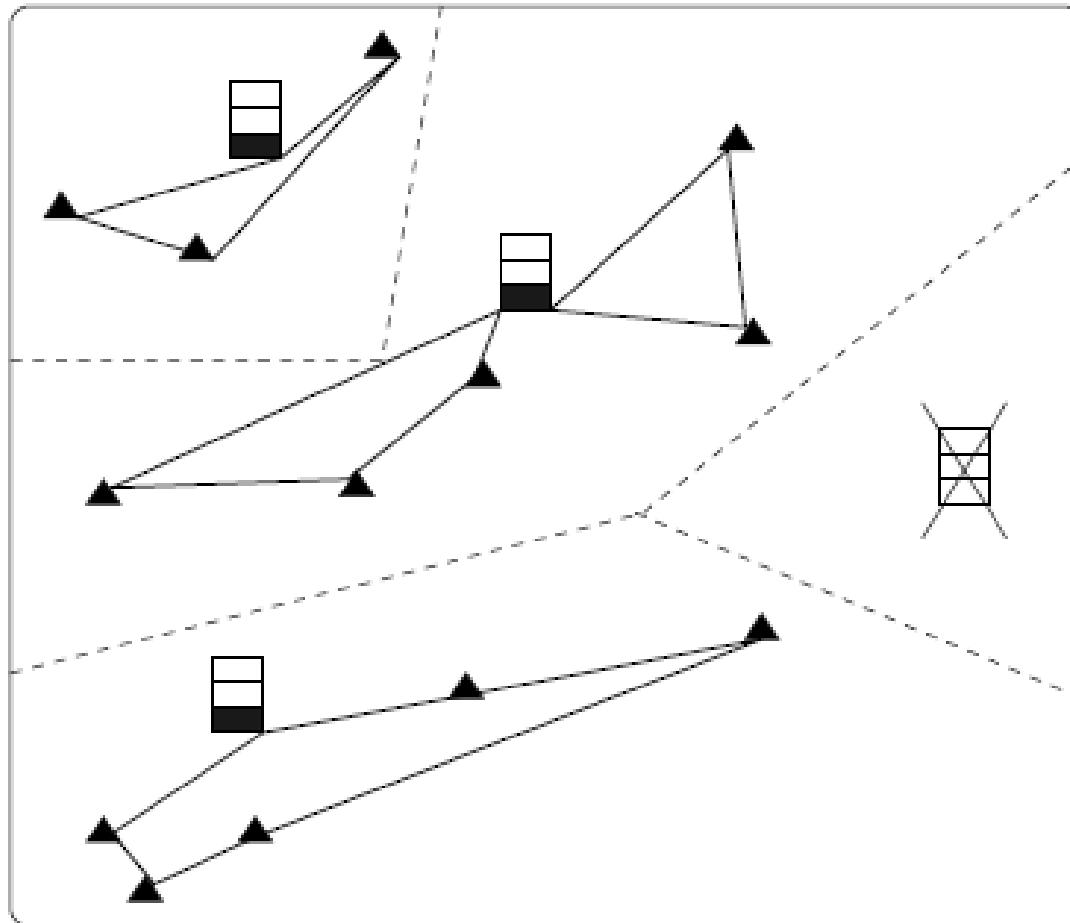
Chaque BTS i a une demande d_i .

d_i est en fait un vecteur à plusieurs composantes, chacune contenant des infos spécifiques comme par exemple le volume de trafic, le nombre de terminaux (téléphones portables) qu'elle peut gérer.

Connaissant la constitution des boucles, on connaît la demande totale de chaque boucle.

La capacité Q_w de chaque équipement w est un vecteur de dimension similaire.

Le problème peut se modéliser par un PL en 0-1



Equipement des sous-sites BSC à la fin de la Phase 3 de l'heuristique

Bibliographie

Cruz, F. R. B., Mateus, G. R. & Macgregor Smith, J. (2003). A Branch-and-Bound Algorithm to Solve a Multi-level Network Optimization Problem. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, 1, 37-56.

A.M.Costa, P.M.França, C.L.Filho. Two-Level network design with intermediate facilities: an application to electrical distribution
Omega 30 (2011) 3-13 www.elsevier.com/locate/omega

Randazzo, C. D., Luna, H. P. L. & Mahey, P. (2001). Benders Decomposition for Local Access Network Design with Two Technologies, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 4, 235-246.

M. Chardy, M-C Costa, A. Faye, M. Tramont. Optimizing the deployment of a multilevel optical FTTH network. IFORS-2011 July 10-15 2011 Melbourne

A.Billionnet, S. Elloumi, L.G. Djerbi. Designing radio-mobile access networks based on Synchronous digital hierarchy rings. *Computers & Operations Research* 2003

C. Prodhon. Le problème de localisation et routage. Thèse de doctorat de l'Université de Technologie de Troyes. 2006

Inégalité de couverture de flot avec un seul module par arc

$$T = \left\{ (f, x) \in R_+^n \times \{0,1\}^n : \sum_{j \in N^+} f_j - \sum_{j \in N^-} f_j \leq b, f_j \leq u_j x_j \quad \forall j \in N^+ \cup N^- \right\}$$

Inégalité de couverture de flot:

Soit $C^+ \subset N^+$ t.q. $\sum_{j \in C^+} u_j = b + \lambda$ avec $\lambda \geq 0$

$$\sum_{j \in C^+} f_j - \sum_{j \in N^-} f_j \leq b + \sum_{j \in C^+} (\lambda - u_j) (1 - x_j)$$

Inégalité de couverture de flot généralisée:

Soit $L \subset N^-, C^- \subset N^- \setminus L$ t.q. $\sum_{j \in C^+} u_j - \sum_{j \in C^-} u_j = b + \lambda$ avec $\lambda \geq 0$

$$\sum_{j \in C^+} f_j - \sum_{j \in N^- \setminus (L \cup C^-)} f_j - \sum_{j \in L} \lambda x_j \leq b + \sum_{j \in C^-} u_j + \sum_{j \in C^+} (\lambda - u_j) (1 - x_j)$$