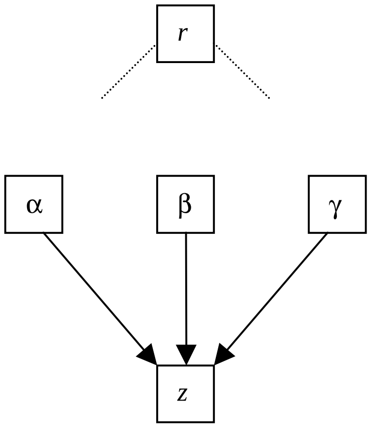
Réseaux d'accès locaux
20 mars 2012

<u>Exercice 1. Inégalité de couverture et inégalité de couverture de flot.</u>



Sur le schéma ci-dessus, nous avons un extrait de réseau d'accès, avec r la racine et z un noeud de demande.
On numérote par 1 l'arc (α,z), 2 l'arc (β,z) et 3 l'arc (γ,z).
Sur chacun de ces arcs, il y a la possibilité d'implanter ou pas un module.
Sur l'arc 1, il y a la possibilité d'implanter un module de capacité $a_1=2$.
Sur l'arc 2, il y a la possibilité d'implanter un module de capacité $a_2=3$.
Sur l'arc 3, il y a la possibilité d'implanter un module de capacité $a_3=4$.
La demande en z est 3.
La modélisation de l'acheminement de la demande en z, se fait par le système de contraintes suivant :

$f_1+f_2+f_3=3$
$f_1\leq 2x_1$, $f_2\leq 3x_2$, $f_3\leq 4x_3$

$f_i \geq 0$ désigne la quantité de flot passant sur l'arc i.
x_i est une variable 0 - 1 qui modélise l'implantation ($x_i=1$) ou pas ($x_i=0$) du module sur l'arc i.

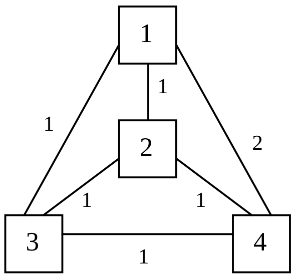
1) On considère $S=\{r,\ldots,\alpha,\beta,\gamma\}$
Le seul nœud qui n'est pas dans S est z et la somme des demandes des nœuds n'appartenant pas à S est 3.
Les arcs qui vont de S à z sont les arcs 1, 2 et 3. On en déduit l'inégalité *coupe* suivante :
$2x_1+3x_2+4x_3\geq 3$

Donner une couverture C et l'inégalité de couverture associée.

2) Soit $C^+=\{1,2\}$. Donner l'inégalité de couverture de flot associé à C^+.

3) On considère la solution fractionnaire obtenue en relâchant les conditions d'intégrité des variables x_i : $f_1=2$, $f_2=1$, $f_3=0$, $x_1=1$, $x_2={}^1/_3$, $x_3=0$.
Vérifier que cette solution viole les deux inégalités trouvées précédemment.

<u>Exercice 2. Réseaux FTTH</u>.



Sur le schéma ci-dessus, est représenté un réseau d'accès FTTH avec le sommet 1 pour racine (accès au réseau cœur). La longueur des arêtes est 1 sauf l'arête (1,4) qui est de longueur 2.
La capacité sur les arêtes est 1. Le nœud 3 demande 4 fibres et le nœud 4 demande 4 fibres.
Pour une fibre en entrée, les coupleurs (splitters) donnent chacun 8 fibres en sortie. Le coût d'un coupleur est 1. Il doit y avoir un coupleur entre la racine et chaque noeud de demande. Les fibres issues de la racine sont de niveau 1. Une fibre sortant d'un coupleur (splitter) est de niveau 2. Autrement dit, les fibres arrivant chez un client sont des fibres de niveau 2.
La modélisation de l'acheminement des fibres au nœud 3 est la suivante :

$$f_{13}^1 + f_{23}^1 + f_{43}^1 = z_3 + f_{31}^1 + f_{32}^1 + f_{34}^1 \quad (1)$$

$$f_{13}^2 + f_{23}^2 + f_{43}^2 + 8z_3 \geq f_{31}^2 + f_{32}^2 + f_{34}^2 + 4 \quad (2)$$

f_{ij}^1 (resp. f_{ij}^2) désigne le nombre de fibres de niveau 1 (resp. 2) allant du sommet *i* au sommet *j*.
z_3 est le nombre de coupleurs (splitters) installés au nœud 3.

On rappelle l'inégalité valide suivante : soit (P) l'ensemble des solutions de $\begin{cases} \beta x + y \geq \alpha \\ x \in Z, y \geq 0 \end{cases}$ avec α, β entiers.
Alors $rx + y \geq r(q+1)$ est valide pour (P) où *r* est le reste de la division entière de α par β et *q* le quotient.

1) A partir de (2) et à l'aide cette inégalité valide pour (P), donner une inégalité valide pour le problème FTTH.
2) Vérifier que cette inégalité est violée par le point fractionnaire : $f_{13}^1 = \frac{1}{2}, z_3 = \frac{1}{2}$, les autres variables nulles.