Programmation Mathématique

Alain Faye

2020-2021

Table des matières

Chapitre 1

Décomposition de Dantzig-Wolfe

1.1 Décomposition de Dantzig-Wolfe

On considère le programme linéaire (P) en nombres entiers ayant la structure suivante :

$$
(P) = \left\{ \begin{array}{ccccc}
\min c^1x^1 & +c^2x^2 & ... & +c^Kx^K & \\
\text{sous les contraintes} & & & & \\
A^1x^1 & +A^2x^2 & ... & +A^Kx^K & \geq a \\
B^1x^1 & & & & \geq b^1 \\
 & B^2x^2 & & & \geq b^2 \\
 & & ... & & \\
 & & & B^Kx^K & \geq b^K \\
x^k \in \mathbb{Z}^{m_k} & k = 1, 2, ..., K & & &
\end{array} \right.
$$

Hors-mis la première ligne de contraintes de second membre a, le problème admet une structure diagonale par bloc. Si ces contraintes, dites couplantes, étaient absentes le problème se décomposerait en K sous-problèmes indépendants.

On note $X^k = \left\{x^k \in \mathbb{Z}^{m_k} : B^kx^k \geq b^k\right\}$ pour $k = 1, ..., K$ où m_k est le nombre de lignes du vecteur colonne x^k (le nombre de colonnes de la matrice B^k) et $\mathbb{Z}$ désigne les entiers relatifs .

On considère le produit cartésien $X = X^1 \times X^2 \times ... \times X^K$. On note $c = \begin{pmatrix} c^1 & c^2 & ... & c^K \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & ... & A^K \end{pmatrix}$.

Dans le problème initial, on minimise sur $x \in X$ soumis aux contraintes couplantes. La décomposition de Dantzig-Wolfe est la relaxation qui consiste à minimiser sur $x \in \text{Conv}(X)$ et toujours soumis aux contraintes couplantes c'est-à-dire :

$$
\begin{array}{c}
\min cx \\
\text{sous les contraintes} \\
Ax \geq a \\
x \in \text{Conv}(X)
\end{array}
$$

Dans cette relaxation, les variables sont les coefficients de la combinaison convexe de x et les paramètres sont obtenus via les éléments de X. On fait donc le changement de variables $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \chi_i$ où p désigne le nombre de points de X avec $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i = 1, .., p$, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et $\chi_i \in X$ pour tout $i = 1, .., p$. Notons que l'on peut toujours exprimer x avec un nombre fini de points affinement indépendants de X (théorème de Carathéodory). Le problème devient le problème (P_{DW}) ci-dessous :

$$(P_{DW}) = \begin{cases} \min_\lambda \sum_{i=1}^p \lambda_i(c\chi_i) & \\ \text{sous les contraintes} & \\ \sum_{i=1}^p \lambda_i(A\chi_i) \geq a & \text{(C)} \\ \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 & \text{(convexité)} \\ \lambda_i \geq 0 & i = 1, ..., p \end{cases}$$

Remarque
Notons que l'on peut aussi bien considérer la relaxation du problème initial où $x^k \in \text{Conv}(X^k)$ pour tout $k = 1, ..., K$. Cette approche fournit le même minorant de la valeur du problème initial puisque $\text{Conv}(X^1 \times X^2 \times ... \times X^K) = \text{Conv}(X^1) \times \text{Conv}(X^2) \times ... \times \text{Conv}(X^K)$.

Nous avons donc un programme linéaire avec potentiellement un grand nombre de variables. Il est hors de question de mettre toutes les variables en même temps. D'ailleurs toute solution optimale aura un nombre de variables non nulles au plus égal au nombre de ligne de A plus 1 pour la conrainte de convexité (cf. l'algorithme du simplexe). D'où l'idée de résoudre le problème avec un algorithme dit de génération de colonnes dans lequel les colonnes intéressantes sont introduites au fur et à mesure.

1.2 Algorithme de générations de colonnes

Les colonnes intéressantes étant celles de coût réduit négatif, à chaque itération on introduit une ou plusieurs variables de coût réduits négatifs et s'il n'y a pas de variables de coût réduit négatif (P_{DW}) est résolu. Le problème qui se pose maintenant est comment trouver la variable de coût réduit minimum.

1.2.1 Recherche de la variable de coût réduit minimum

On est à une itération quelconque de l'algorithme de génération de colonne. On vient de résoudre le problème dit maître avec un nombre de variables restreint. On note alors μ le vecteur ligne (avec autant de colonnes que de lignes dans A) des variables duales (positives ou nulles) associées à la contrainte (C) et η la variable duale associée à la contrainte de convexité. Le coût réduit d'une variable λ_i s'obtient en retranchant au coût de la variable λ_i la combinaison linéaire des coefficients des lignes de la colonne (des contraintes) associée à λ_i, les coefficients de la combinaison linéaire étant les variables duales soit $c\chi_i - \mu A\chi_i - \eta$.

Chercher une variable de coût réduit minimum revient donc à résoudre le problème en variables entières suivant :

$$\min_{\chi \in X} c\chi - \mu A\chi - \eta$$

Ce problème est appelé sous-problème. La résolution de ce sous-problème va fournir au problème maitre une nouvelle colonne celle engendrée par la solution trouvée χ. Ce problème est un problème en nombres entiers donc potentiellement difficile. Cependant, il se décompose en K sous-problèmes indépendants puisque les contraintes couplantes n'apparaisent pas ici.

$$\min_{\chi \in X} c\chi - \mu A\chi - \eta = \sum_{k=1}^{K} \min_{\chi \in X^k} c^k\chi - \mu A^k\chi - \eta$$

On peut noter aussi que dans le sous-problème la variable duale η est une constante et donc n'intervient pas dans la résolution.

1.2.2 Encadrement de la valeur optimale

A chaque intération de l'algorithme de génération de colonnes, il est possible d'obtenir facilement un encadrement de la valeur optimale du problème relaché. A savoir, si on note $v(P_{DW})$ cette valeur et c_{red} le coût réduit minimum (obtenu par la résolution du sous-problème) :

$$c_{red} + \mu a + \eta \leq v(P_{DW}) \leq \mu a + \eta$$

La borne supérieure (à droite) est la valeur courante du problème maître que l'on a calculée en utilisant l'objectif du dual du problème maître. La borne inférieure (à gauche) est donc la valeur courante du problème maitre plus le coût réduit minimum calculé par le sous-problème. On voit ainsi que si $c_{red} = 0$ alors $v(P_{DW}) = \mu a + \eta$ la valeur courante du programme maître et on peut stopper l'algorithme de génération de colonnes.

Proposition 1.1 *A une itération quelconque de l'algorithme de génération de colonnes, soient μ et η les variables duales optimales associées respectivement aux contraintes couplantes (C) et à la contrainte de convexité. La valeur du problème relaché P_{DW} est supérieure ou égale à $cred + \mu a + \eta$.*

Proof Soit λ^* la solution optimale de P_{DW}.

$$\begin{cases} v(P_{DW}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^*(c\chi_i) & \\ \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^*(c\chi_i) + \mu(a - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^*(A\chi_i)) & \text{car } \lambda^* \text{ vérifie les contraintes couplantes (C) et } \mu \geq 0 \\ = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^*(c\chi_i - \mu A\chi_i) + \mu a & \\ \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^*(cred + \eta) + \mu a & \text{par définition du coût réduit minimum } cred \\ = cred + \eta + \mu a & \text{car } \lambda^* \text{ vérifie la contrainte de convexité} \end{cases}$$

■

1.3 Comparaison avec d'autres relaxations

1.3.1 Lien avec la relaxation lagrangienne

La valeur de (P_{DW}) coïncide avec la valeur du problème dual lagrangien du problème initial (P) obtenue en "relachant" les contraintes couplantes. Donc l'algorithme de génération de colonnes peut être vu comme un algorithme pour résoudre le dual lagrangien. L'autre intérêt de cet algorithme est que le dernier problème maitre résolu en variables λ entières, donc 0-1, fournit une solution approchée du problème initial (P). Il peut arriver cependant que ce problème maître en variables 0-1 n'admette pas de solution.

1.3.2 Lien avec la relaxation continue

Etant donné que, pour tout $k = 1, ..., K$, $\mathrm{Conv}(X^k) \subset \left\{x^k \in \mathbb{R}^{m_k} : B^k x^k \geq b^k\right\}$, la valeur de (P_{DW}) est supérieure ou égale à la valeur de la relaxation continue de (P) où la condition $x^k \in \mathbb{Z}^{m_k}$ est remplacée par $x^k \in \mathbb{R}^{m_k}$ pour tout $k = 1, ..., K$.

1.4 Méthodes de stabilisation

Chapitre 2

Décomposition de Benders

2.1 Introduction

On considère le problème linéaire (P) en variables mixtes suivant :

$$(P) = \begin{cases} \max cx + hy \\ \text{sous les contraintes} \\ Ax + Gy \leq b \\ x \in X \subset \mathbb{R}^n \qquad y \geq 0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

La partie X peut être strictement incluse dans $\mathbb{R}^n$. Par exemple, il peut y avoir des conditions d'intégrité sur le vecteur x. Par contre, le vecteur y a ses coordonnées positives ou nulles mais sans conditions d'intégrité. Pour x fixé, on a donc un problème linéaire en la variable y.

L'idée de base de la décomposition de Benders est, pour x fixé, de résoudre le sous-problème en y défini par $SP(x)$:

$$SP(x) = \begin{cases} \max hy \\ \text{sous les contraintes} \\ Gy \leq b - Ax \\ y \geq 0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Finalement, si on note $v(SP(x))$ la valeur du sous-problème , on peut écrire (P) sous la forme suivante :

$$\begin{array}{c} \max cx + v(SP(x)) \\ \text{sous les contraintes} \\ x \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Il peut arriver que des $x \in X$ produisent des sous-problèmes $SP(x)$ sans solution. Dans ce cas, $v(SP(x)) = -\infty$, ce qui écarte finalement ce type de x.

Dans certains cas, pour x fixé, le problème en y peut être partionné en K sous-problèmes indépendants. Ceci se produit avec le problème (P_K) de structure suivante :

$$(P_K) = \begin{cases} \begin{array}{cccccc} \max cx & +h^1y^1 & +h^2y^2 & ... & +h^Ky^K & \\ \text{sous les contraintes} & & & & & \\ A^1x & +G^1y^1 & & & & \leq b^1 \\ A^2x & & +G^2y^2 & & & \leq b^2 \\ ... & & & ... & & ... \\ A^Kx & & & & +G^Ky^K & \leq b^K \\ x \in X \subset \mathbb{R}^n & y^k \geq 0 \in \mathbb{R}^{m^k} & k = 1, ..., K & & & \end{array} \end{cases}$$

Exemple : optimisation stochastique à deux étapes.
Supposons que les paramètres h, A, G, et b dans (P) soient soumis à des aléas et dépendent de K scenarios. $k = 1, ..., K$ sont les numéros des différents scenarios qui peuvent se produire. Dans le scenario k, les paramètres sont donnés par h^k, A^k, G^k, et b^k. Le scenario k apparait avec une probabilité p_k.

Les décisions de première étape (à prendre ici et maintenant) sont représentées par x. Si le scenario k se produit, la décision optimale à prendre sera donnée par y^k la variable de deuxième étape relative au scenario k. La variable y^k optimise la fonction de deuxième étape $Q(x, k)$ définie par :

$Q(x, k) = \max_{y^k} h^k y^k$
sous les contraintes
$G^k y^k \leq b^k - A^k x$
$y^k \geq 0 \in \mathbb{R}^{m^k}$

dont la valeur dépend de x et du scenario k. Le problème étant aléatoire, on minimise, sur x, l'objectif qui prend en compte l'espérance, sur les scenarios, de la valeur de la fonction de deuxième étape, soit :

$\max cx + \mathbb{E}_k(Q(x, k))$
$x \in X \subset \mathbb{R}^n$

L'espérance est calculée par la somme pondérée $\sum_{k=1}^{K} p_k Q(x, k)$. Et finalement, on obtient un problème de structure identique à (P_K).

2.2 Principe de la décomposition de Benders

On peut écrire (P) sous la forme :

$$\begin{array}{c} \max cx + t \\ \text{sous les contraintes} \\ t \leq v(SP(x)) \\ x \in X \subset \mathbb{R}^n \qquad t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Ecrit sous cette forme le problème reste compliqué en raison de la contrainte $t \leq v(SP(x))$ qui oblige à résoudre le sous-problème. L'idée est de la remplacer par une voire plusieurs inégalités valides. Une idée simple pour avoir des inégalités valides est de recourir au dual de $SP(x)$:

$$DSP(x) = \left\{ \begin{array}{c} \min u(b - Ax) \\ \text{sous les contraintes} \\ uG \geq h \\ u \geq 0 \in \mathbb{R}^p \end{array} \right.$$

où $u \geq 0$ est le vecteur ligne des variables duales et où p désigne le nombre de lignes de G et donc le nombre de colonnes de u.

En effet, pour tout u satisfaisant les contraintes du dual on a $v(SP(x)) \leq u(b-Ax)$ et on aura même égalité si u est solution optimale du dual. D'où la validité de l'inégalité $t \leq u(b - Ax)$. Il reste tout de même un problème lorsque x induit un sous-problème sans solution. Alors son dual admet un optimum non borné (i.e $-\infty$), ce qui ne sera pas rendu par les inégalités précédentes. Pour éviter cela, il suffit d'utiliser les contraintes de la forme $v(b - Ax) \geq 0$ pour tout $v \in \{v \geq 0 : vG \geq 0\}$. En effet, si x satisfait cette contrainte on ne touvera pas de direction v dans laquelle l'objectif $(u + \alpha v)(b - Ax)$ décroît indéfiniment quand α tend vers $+\infty$.

Il y a potentiellement beaucoup d'inégalités valides même si l'on se resteint aux points extrêmes et rayons extrêmes du polyèdre défini par les contraintes de $DSP(x)$. De plus toutes ne seront pas forcément utiles, d'où l'idée d'un algorithme de génération de contraintes.

2.3 Algorithme de génération de coupes de Benders

Comme on l'a vu précédemment, il y a deux types d'inégalités valides celles induites par les points u et celles induites par les directions v du polyèdre des contraintes de $DSP(x)$. On appelle ces inégalités valides coupes de Benders. On introduit ces coupes au fur et à mesure, selon le processus itératif suivant. A une itération donnée, on résout le problème maître soumis aux coupes de Benders que l'on a ajoutées jusque là. Une fois le problème maître résolu, on cherche une coupe de Benders violée par la solution courante du problème maître. S'il en existe une on la rajoute au problème maître sinon le problème (P) est résolu.

Algorithme de génération de coupes de Benders
Initialisation
  $U^0 = \emptyset$, $V^0 = \emptyset$, $i = 0$
Itérations
  résoudre le problème maître : $\max_{x,t} cx + t$ sous les contraintes $\begin{cases} t \leq u(b - Ax) & \forall u \in U^i \\ v(b - Ax) \geq 0 & \forall v \in V^i \end{cases}$
  Soit x^*, t la solution du problème maître
  résoudre le sous-problème $DSP(x^*)$
  si $DSP(x^*)$ admet une valeur finie
    soit $v(DSP(x^*))$ la valeur du sous-problème et u^* la solution
    si $t > v(DSP(x^*))$
      $U^{i+1} = U^i \cup \{u^*\}$
    sinon STOP (P) est résolu
  sinon
    soit une direction v^* du polyèdre des contraintes de $DSP(x^*)$ telle que $v^*(b - Ax^*) < 0$
    $V^{i+1} = V^i \cup \{v^*\}$
  $i = i + 1$ et réitérer

A chaque itération de l'algorithme la valeur du problème (P) est encadrée par :

$$cx^* + v(SP(x^*)) \leq v(P) \leq cx^* + t$$

Le majorant (à droite) n'est autre que la valeur du problème maître courant. Le minorant (à gauche) est la valeur donnée par la solution réalisable de (P) induite par x^*. Le majorant ne peut pas augmenter d'une itération à l'autre puiqu'on rajoute une containte dans le problème maître. A contrario, le minorant peut baisser d'une itération à l'autre. C'est pourquoi il peut être intéressant de garder le meilleur minorant (le plus grand) obtenu au cours des itérations . Si on estime que la distance entre le meilleur minorant et le majorant est assez faible, on peut arrêter l'algorithme avant terme.

2.4 Adaptation au problème K-décomposable (P_K)

Il est naturel d'écrire (P_K) sous la forme :

$$\begin{array}{ccc} \max cx + \sum_{k=1}^{K} t_k & & \\ \text{sous les contraintes} & & \\ t_k \leq v(SP_k(x)) & & k = 1, ..., K \\ x \in X \subset \mathbb{R}^n & t_k \in \mathbb{R} & k = 1, ..., K \end{array}$$

avec le $k^{\text{ième}}$ sous-problème $SP_k(x)$ naturellement donné par :

$$SP_k(x) = \begin{cases} \max h^k y \\ \text{sous les contraintes} \\ G^k y^k \leq b^k - A^k x \\ y^k \geq 0 \in \mathbb{R}^{m_k} \end{cases}$$

Dans l'algorithme de génération de coupes de Benders, à chaque itération, on rajoute les coupes de Benders données par les problèmes duaux des $SP_k(x)$ $k = 1, ..., K$. On s'arrête dès qu'il n'y a pas de contraintes violées par la solution $x^*, t_1, ..., t_K$ du problème maître. L'intérêt de décomposer le problème est que l'on génère des inégalités avec moins de variables.

2.5 Coupes de Benders pareto-optimales

Il arrive que le sous-problème et plus précisément son dual ait, pour un x donné, de multiples solutions optimales. L'objectif de cette section est de sélectionner parmi ces mutiples solutions celles qui sont les meilleures pour le problème maître c'est-à-dire celles qui génèrent de meilleures coupes de Benders.

Pour la suite et par souci d'abbréviation, on notera $g(x) = b - Ax$. La fonction objectif du sous-problème dual s'écrit donc $ug(x)$. On rappelle que les coupes de Benders sont de la forme $t \leq ug(x)$ et que dans le problème maître $x \in X$. On note U l'ensemble des solutions réalisables du sous-problème dual : $U = \{u \in \mathbb{R}^p : uG \geq h, u \geq 0\}$.

2.5.1 Coupes dominées

Définition 2.1 *$u \in U$ est dominée s'il existe $u' \in U$ tel que $u'g(x) \leq ug(x)$ pour tout $x \in X$ et avec une inégalité stricte pour au moins un x de X.*

Ainsi si $u \in U$ est dominée, il existe un $u' \in U$ qui donne une meilleure coupe de Benders puisque $t \leq u'g(x) \leq ug(x)$ pour tout $x \in X$. Donc autant éviter ce genre de u.

Exemple 2.1 *On considère $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $g(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Soient les 3 vecteurs u suivants : $u^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, $u^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $u^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$.*

u_1 n'est pas dominé par u_3 car $u^1 g \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 < u^3 g \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$. Par contre, u^1 est dominé par u^2 car $u^1 g \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u^2 g \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$, et $u^1 g \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 > u^2 g \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$.

Définition 2.2 *$u \in U$ est pareto-optimale si elle n'est pas dominée.*

Et par suite on préfèrera les u pareto-optimaux.

2.5.2 Comment trouver les coupes pareto-optimales ?

On note $ConvX$ l'enveloppe convexe de X et $ri(ConvX)$ l'intérieur relatif de $ConvX$. Soit $x^* \in X$, on note $U(x^*)$ l'ensemble des solutions optimales de $DSP(x^*)$ le sous-problème dual en x^* c'est-à-dire l'ensemble des $u \in U$ qui minimisent $ug(x^*)$.

Théorème 2.1 *Soit $x^0 \in ri(ConvX)$. u^0 solution optimale de $\min \left\{ ug(x^0) : u \in U(x^*) \right\}$ est pareto-optimale.*

On note immédiatement que si $U(x^*)$ est réduit à un seul élément u^* alors cet élément u^* est pareto-optimal puisque la solution de $\min\left\{ug(x^0) : u \in U(x^*)\right\}$ ne peut être que cet unique élément u^*. Lorsque $U(x^*)$ contient plusieurs éléments, il se pose la question de comment les parcourir. La réponse est simple : il suffira de résoudre le problème $\min\left\{ug(x^0) : u \in U \text{ et } ug(x^*) = u^*g(x^*)\right\}$ où u^* est un élément quelconque de $U(x^*)$.

Exemple 2.2 *Reprenons l'exemple précédent.*

Supposons maintenant que $U = \left\{u \in \mathbb{R}^2_+ : u_1 \geq 1, u_1 + u_2 \geq 3, u_2 \leq 3\right\}$. *Le sous-problème dual est* $\min\{ug(x) : u \in U\}$. *Examinons les différents cas :*

1. $x = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. *Le sous-problème dual est* $\min\{u_1 + u_2 : u \in U\}$. *Sa valeur est* 3 *et il y a plusieurs solutions, par exemple* $u^1 = \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}$. *Cherchons une solution pareto-optimale. Le point suivant est dans l'intérieur relatif de* $ConvX$: $x^0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. *Résolvons* $\min\left\{ug(x^0) : u \in U(x^*)\right\}$ *c'est-à-dire* $\min\{u_1 : u \in U \text{ et } u_1 + u_2 = 3\}$. *La solution optimale est* $u^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$.

2. $x = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. *Le sous-problème dual est* $\min\{u_1 - u_2 : u \in U\}$. *Sa valeur est* -2 *et il y a une unique solution* $u^3 = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$. *Elle est donc pareto-optimale.*

Il reste à trouver un $x^0 \in ri(ConvX)$. Si X est un polyèdre, il suffit de prendre un point satisfaisant strictement toutes les inégalités définissant le polyèdre. Si $X = \left\{x^1, ..., x^r\right\}$ est un ensemble fini de points, il suffit de prendre une combinaison convexe de ces points sans coefficient nul comme par exemple $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x^i$. Par contre, X peut contenir un nombre r de points très grand voire infini et on ne peut pas énumérer tous ces points. Dans ce cas, on peut toujours prendre un sous-ensemble de X comme cela on obtiendra la pareto-optimalité de u^0 au moins sur ce sous-ensemble. Par exemple, on peut prendre en compte les points x solutions optimales du problème maître générés au fur et à mesure des itérations de l'algorithme des coupes de Benders.

Chapitre 3

Inégalité valide, facette

3.1 Motivation

On considère le problème linéaire en nombres entiers suivant :

$$(P_{int}) = \begin{cases} \min cx \\ \text{sous les contraintes} \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{N}^n \end{cases}$$

On note X l'ensemble des solutions réalisables de (P_{int}) :

$$X = \left\{x \in \mathbb{N}^n : Ax \leq b\right\}.$$

L'objectif est de décrire $ConvX$, l'enveloppe de X, par un ensemble d'inégalités (linéaires) ou tout au moins d'en obtenir une bonne approximation.

Dans une première partie, on verra comment obtenir des inégalités valides c'est-à-dire vérifiées par les points de X et donc de $ConvX$. Dans un deuxième temps, on verra comment distinguer dans toutes ces inégalités valides les plus importantes pour la description de $ConvX$.

3.2 Inégalité valide

3.2.1 Définition

L'inégalité $\pi x \leq \pi_0$ est valide pour X si et seulement si elle est vérifiée par tous les points de X. Par exemple, pour $X = \left\{x \in \{0,1\}^5 : 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \leq -2\right\}$, les inégalités $x_2 + x_4 \geq 1$ et $x_1 \leq x_2$ sont valides.

3.2.2 Coupes de Chvatal

On note $\lfloor a \rfloor$ le plus grand entier (relatif) inférieur ou égal à a. Par exemple : $\lfloor 5,4 \rfloor = 5$, $\lfloor -5,4 \rfloor = -6$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -5 \rfloor = -5$.

Soit $ax \leq b$ une inégalité vérifiée par un vecteur x d'entiers positifs ou nuls de X. A partir de cette inégalité, on peut en déduire une autre valide pour X, en 2 étapes, de la façon suivante :

1. relaxation : $\sum_{i=1}^{n} \lfloor a_i \rfloor x_i \leq b$ est valide car $x \geq 0$
2. troncature : $\sum_{i=1}^{n} \lfloor a_i \rfloor x_i \leq \lfloor b \rfloor$ est valide car x est entier

Exemple. On peut retrouver les 2 précédentes inégalités valides de X à partir des inégalités valides triviales suivantes $0 \leq x_j \leq 1, j = 1, ..., 5$ et la contrainte définissant X soit $3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \leq -2$.

— partons de l'inégalité valide : $(3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \leq -2) \times \frac{1}{4}$
— relaxation : $0x_1 - x_2 + 0x_3 - x_4 + 0x_5 \leq -\frac{1}{2}$
— troncature : $0x_1 - x_2 + 0x_3 - x_4 + 0x_5 \leq -1$

Ce qui donne l'inégalité $x_2 + x_4 \geq 1$.

— partons de l'inégalité valide : $(3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \leq -2) \times \frac{1}{3} + (x_2 \leq 1) \times \frac{1}{3} + (x_4 \leq 1)$
— relaxation : $x_1 - x_2 + 0x_3 - 0x_4 + 0x_5 \leq \frac{2}{3}$
— troncature : $x_1 - x_2 + 0x_3 - 0x_4 + 0x_5 \leq 0$

Ce qui donne $x_1 \leq x_2$.

Il est naturel de faire un processus itératif qui à chaque itération enrichit l'ensemble d'inégalités valides par celles trouvées précédemment. C'est la procédure de Chvatal. Cette procédure permet-elle de trouver toutes les inégalités valides ?

Théorème 3.1 *Soit $X = P \cap \{0,1\}^n$ avec P un polyèdre borné et contenu dans $[0,1]^n$. Si $\pi x \leq \pi_0$ est une inégalité valide pour X avec π_i pour $i = 1, ...n$, π_0 entiers alors elle s'obtient en un nombre fini d'itérations de la procédure de Chvatal .*

Ce résultat est soumis au bon choix de l'inégalité valide à chaque itération de la procédure de Chvatal. La démonstration du théorème est constructive et elle donne l'inégalité valide à tronquer. Le résultat s'étend à des ensembles X plus généraux soumis à des contraintes d'intégrité sur les variables mais pas seulement des conditions binaires 0-1.

3.2.3 Coupes de Gomory fractionnaires

Les coupes de Gomory fractionnaires interviennent dans la résolution de (P_{int}). On résout la relaxation continue et on élimine les solutions fractionnaires. Ainsi, soit une ligne du tableau simplexe associée à une variable de base x_i fractionnaire.

$$x_i + \sum_{j \in N} \bar{a}_j x_j = \bar{b}_i$$

où N est l'ensemble des variables hors-base. On écrit $\bar{b}_i = \lfloor \bar{b}_i \rfloor + f_i$ sachant que $f_i > 0$ désigne la partie fractionnaire de $\bar{b}_i$. Les variables étant positives ou nulles et de plus entières, on peut faire une coupe de Chvatal à partir de cette contrainte d' égalité :

$$x_i + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_j \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

En reportant x_i par son expression, on obtient :

$$-\left(\sum_{j \in N} \bar{a}_j x_j\right) + \bar{b}_i + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_j \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

Ce qui donne après regroupement des termes :

$$\sum_{j \in N} f_j x_j \geq f_i$$

où $f_j = \bar{a}_j - \lfloor \bar{a}_j \rfloor$ est partie fractionnaire de $\bar{a}_j$ pour $j \in N$. C'est la coupe de Gomory fractionnaire. Elle élimine la solution de base courante où $x_j = 0 \ \forall j \in N$.

Exemple. Soit le programme en variables entières positives ou nulles :

$$(P_{ex1}) = \begin{cases} \min -x_1 - 2x_2 \\ \text{sous les contraintes} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On résout la relaxation continue. x_1, x_2 sont en base et x_3, x_4 hors-base. La solution optimale est $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = x_4 = 0$. Les lignes du tableau simplexe relatives aux contraintes sont :

$$x_1 + \tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{1}{6}x_4 = \tfrac{1}{2}$$
$$x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 + \tfrac{1}{6}x_4 = \tfrac{3}{2}$$

La coupe de Gomory fractionnaire générée par la ligne relative à x_1 est :

$$\tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{5}{6}x_4 \geq \tfrac{1}{2}$$

La coupe de Gomory fractionnaire générée par la ligne relative à x_2 est :

$$\tfrac{2}{3}x_3 + \tfrac{1}{6}x_4 \geq \tfrac{1}{2}$$

Ces inégalités sont violées par la solution courante.

3.3 Inégalité valide en variables mixtes

Dans la section précédente on considérait des inégalités avec des variables entières mais qu'arrive t-il lorsque les inégalités contiennent à la fois des variables entières et des variables fractionnaires ? Nous allons voir comment faire face à de telles situations en présentant l'inégalité dite de base.

3.3.1 Inégalité de base

On définit f la partie fractionnaire d'un nombre a par $f = a - \lfloor a \rfloor$ où $\lfloor a \rfloor$ le plus grand entier (relatif) inférieur ou égal à a. Par exemple : la partie fractionnaire de 5,4 est $f = 5,4 - 5 = 0,4$, la partie fractionnaire de -5,4 est $f = -5,4 - (-6) = 0,6$.

Proposition 3.1 *Soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z} : y \leq b + x\}$ où b est un scalaire (nombre réel quelconque) et soit f la partie fractionnaire de b. L'inégalité $y \leq \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1-f}$ est valide pour X.*

Proof

1. cas $y \leq \lfloor b \rfloor$. Comme $\frac{x}{1-f} \geq 0$, la valididité de l'inégalité est démontrée.
2. cas $y \geq \lfloor b \rfloor + 1$. Alors $\lfloor b \rfloor + 1 \leq b + x$ ce qui entraîne $1 - f \leq x$ soit encore $1 \leq \frac{x}{1-f}$. Maintenant $y \leq b + x = \lfloor b \rfloor + f + x = \lfloor b \rfloor + f(1 + \frac{x}{f}) \leq \lfloor b \rfloor + f(\frac{x}{1-f} + \frac{x}{f}) = \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1-f}$.

■

Pour les cas où la variable entière y est à droite du signe inférieur ou égal, on appliquera la proposition suivante. On note $\lceil b \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à b.

Proposition 3.2 *Soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z} : b \leq y + x\}$ où b est un scalaire (nombre réel quelconque) et soit f la partie fractionnaire de b. L'inégalité $\lceil b \rceil \leq y + \frac{x}{f}$ est valide pour X.*

Proof On écrit $-y \leq -b + x$ et on utilise la proposition précédente en remarquant que $\lfloor -b \rfloor = -\lceil b \rceil$ et que la partie fractionnaire de $-b$ est égale à 1 moins la partie fractionnaire de b.

■

Cette inégalité de base peut sembler d'un intérêt limité car ne comportant que 2 variables. Mais on peut l'utiliser dans le cas de contrainte avec plus de 2 variables en aggrégeant (additionnant) les variables entières d'une part et les variables fractionnaires d'autre part. C'est ce que l'on fait pour construire l'inégalité Mixed Integer Rounding.

3.3.2 Inégalité Mixed Integer Rounding

On note $a^+ = max\,\{0, a\}$. Par exemple, $(-5)^+ = 0$ et $5^+ = 5$.

Proposition 3.3 *Soit* $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}^n : \sum_{i=1}^n a_i\ y_i \leq b + x\}$ *où* b *est un scalaire (nombre réel quelconque) et soient* f *la partie fractionnaire de* b *et* f_i *la partie fractionnaire de* a_i*. L'inégalité* $\sum_{i=1}^n \left(\lfloor a_i \rfloor + \frac{(f_i - f)^+}{(1-f)}\right) y_i \leq \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1-f}$ *est valide pour* X*.*

Proof Pour les i tels que $f_i \leq f$, on écrit $\lfloor a_i \rfloor \leq a_i$. Pour les i tels que $f_i > f$, on écrit $a_i = \lfloor a_i \rfloor + 1 - 1 + f_i$. Ensuite, on met à gauche $\sum_{i:f_i>f}(f_i - 1)y_i \leq 0$ et on regroupe $x + \sum_{i:f_i>f}(1 - f_i)y_i \geq 0$. On applique alors l'inégalité de base. Ce qui donne $\sum_{i:f_i \leq f} \lfloor a_i \rfloor y_i + \sum_{i:f_i>f} (\lfloor a_i \rfloor + 1)\, y_i \leq \lfloor b \rfloor + \frac{x + \sum_{i:f_i>f}(1-f_i)y_i}{1-f}$. Maintenant, il ne reste plus qu'à réarranger les termes. On fait passer à gauche le terme $\sum_{i:f_i>f} \frac{(1-f_i)}{1-f} y_i$. Pour chaque i t.q. $f_i > f$ le coefficient de y_i devient $\lfloor a_i \rfloor + 1 + \frac{f_i - 1}{1-f} = \lfloor a_i \rfloor + \frac{f_i - f}{1-f}$. On retrouve bien l'inégalité proposée.

■

3.3.3 Coupes de Gomory mixed integer

Les coupes de Gomory mixed integer interviennent dans la résolution de problème en variables mixtes y entières positives ou nulles et x continues et positives ou nulles. On considère une ligne du tableau simplexe associée à une variable de base y_i fractionnaire. On note N_I les indices des variables y hors-base et N_C les indices des variables x hors-base.

$$y_i + \sum_{j \in N_I} \bar{a}_j y_j + \sum_{j \in N_C} \bar{a}_j x_j = \bar{b}_i$$

Pour les variables continues, on distingue celles affectées d'un coefficient positif $\bar{a}_j \geq 0$ et celles affectées d'un coefficient négatif $\bar{a}_j < 0$. L'équation précédente s'écrit alors :

$$y_i + \sum_{j \in N_I} \bar{a}_j y_j + \sum_{j \in N_C : \bar{a}_j \geq 0} \bar{a}_j x_j = \bar{b}_i - \sum_{j \in N_C : \bar{a}_j < 0} \bar{a}_j x_j$$

A droite du signe égal, les variables x sont affectées de coefficients positifs ou nuls. A gauche du signe égal, les variables x sont affectées, elles aussi, de coefficients positifs ou nuls. On retire cette masse à gauche positive ou nulle, et l'on se retrouve face à une inégalité sur laquelle on peut maintenant appliquer l'inégalité MIR (Proposition 3.3) :

$$y_i + \sum_{j \in N_I : f_j \leq f_i} \lfloor \bar{a}_j \rfloor y_j + \sum_{j \in N_I : f_j > f_i} \left(\lfloor \bar{a}_j \rfloor + \frac{f_j - f_i}{1 - f_i}\right) y_j \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor - \frac{\sum_{j \in N_C : \bar{a}_j < 0} \bar{a}_j x_j}{1 - f_i}$$

où $f_j = \bar{a}_j - \lfloor \bar{a}_j \rfloor$ est partie fractionnaire de $\bar{a}_j$ pour $j \in N_I$ et $f_i = \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$ est partie fractionnaire de $\bar{b}_i$.

En reportant l'expression de y_i découlant de l'égalité précédente, on obtient :

$$\sum_{j \in N_I : f_j \leq f_i} f_j y_j + \sum_{j \in N_I : f_j > f_i} \frac{f_i(1 - f_j)}{1 - f_i} y_j + \sum_{j \in N_C : \bar{a}_j \geq 0} \bar{a}_j x_j - \sum_{j \in N_C : \bar{a}_j < 0} \bar{a}_j \frac{f_i}{1 - f_i} x_j \geq f_i$$

C'est la coupe de Gomory mixed integer.

Exemple. On considère le programme en variables mixtes suivant :

$$(P_{ex2}) = \begin{cases} \min -y_1 - 2y_2 \\ \text{sous les contraintes} \\ y_1 + y_2 + y_3 = 2 \\ -2y_1 + y_2 + x_4 = \frac{1}{2} \\ y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N}, x_4 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

La relaxation continue donne comme solution optimale $y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{3}{2}, y_3 = x_4 = 0$ avec y_1, y_2 en base et y_3, x_4 hors-base. Les lignes du tableau simplexe relatives aux contraintes sont :

$$\begin{array}{c} y_1 + \frac{1}{3}y_3 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{2} \\ y_2 + \frac{2}{3}y_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{3}{2} \end{array}$$

La coupe de Gomory mixed integer générée par la ligne y_1 est :

$$\tfrac{1}{3}y_3 + \tfrac{1}{3}x_4 \geq \tfrac{1}{2}$$

La coupe de Gomory mixed integer générée par la ligne y_2 donne la même inégalité.

3.4 Polyèdres et facettes

On se situe dans cette section dans le cadre des polyèdres. Nous allons nous intéresser à la dimension et aux faces d'un polyèdre et plus particulièrement aux facettes. Les résultats obtenus seront applicables au cas d'ensembles définis comme enveloppe convexe de points car lorsque les points considérés sont en nombre fini leur enveloppe convexe est un polyèdre.

3.4.1 Polyèdre

Un polyèdre est l'ensemble de solutions d'un ensemble fini d'inégalités linéaires.

$$P = \{x : \quad a^i x \leq b_i \quad i \in I\}$$

Exemple d'un polyèdre de $\mathbb{R}^2$ défini par 4 inégalités.

$$P = \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 & (2) \\ x_1 \geq 0 & (3) \\ x_2 \geq 0 & (4) \end{cases}$$

Ici on a :

$$\begin{cases} a^1 = (1 \;\; 1) & b_1 = 2 \\ a^2 = (2 \;\; 1) & b_2 = 3 \\ a^3 = (-1 \;\; 0) & b_3 = 0 \\ a^4 = (0 \;\; -1) & b_4 = 0 \end{cases}$$

3.4.2 Dimension d'un polyèdre

Pour déterminer la dimension d'un polyèdre P, on peut chercher le nombre maximum p de points affinement indépendants de P. La dimension de P est alors $p-1$. On peut aussi déterminer cette dimension, en cherchant l'ensemble des hyperplans contenant P.

Dans I on distingue les inégalités qui sont en fait vérifiées avec égalité par tous les points de P. Soit $I^= = \{i \in I : a^i x = b_i \; \forall x \in P\}$. On définit ensuite $I^{\leq} = I \backslash I^=$. On note que $I^=$ peut être éventuellement vide. Finalement P peut être décrit de la façon suivante :

$$P = \{x : \quad a^i x = b_i \quad i \in I^=, \quad a^i x \leq b_i \quad i \in I^{\leq}\}$$

Exemple. Soit le polyèdre de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$P = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 & (1) \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq -2 & (2) \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2 & (3) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -2 & (4) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 & (5) \end{cases}$$

Ici, bien que ce ne soit pas très apparent on a : $I^= = \{(1), (2), (3), (4)\}$. Pour le voir, on remarque que (1) étant l'opposée de (2), (1) et (2) sont bien satisfaites avec égalité. Pour (3) et (4) cela est moins évident. Mais tenant compte de l'égalité induite par (1) et (2), on peut vérifier que (3) est l'opposé de (4) et les 2 inégalités sont donc satisfaites avec égalité.

Soit $\left\{a^{i_1}, ..., a^{i_k}\right\}$ un sous-ensemble des vecteurs (rangées) des membres gauches des contraintes de P. On note $rang\left\{a^{i_1}, ..., a^{i_k}\right\}$, la dimension de l'espace engendré par ces vecteurs. La dimension de P est égale à $n - rang\left\{a^i : i \in I^=\right\}$.

Notons que si $I^= = \emptyset$ alors P est de dimension pleine c'est-à-dire n.

Dans la pratique, on est souvent obligé de combiner les 2 méthodes pour calculer la dimension car quand on cherche p le nombre maximum de points affinement indépendants dans le polyèdre P on n'est pas sûr de l'avoir trouvé et de même lorsque que l'on cherche $I^=$. Par contre si on a trouvé un p et un $I^=$ tels que $p-1 = n - rang\left\{a^i : i \in I^=\right\}$, on est certain d'avoir bien déterminé la dimension du polyèdre.

Dans l'exemple précédent, on a trouvé $I^=$, mais est-on sûr de n'avoir pas oublié une égalité ? Le rang des 4 vecteurs de $I^=$

$$\begin{cases} a^1 = & (1 \quad 1 \quad 1) \\ a^2 = & (-2 \quad -2 \quad -2) \\ a^3 = & (1 \quad 1 \quad 2) \\ a^4 = & (1 \quad 1 \quad -2) \end{cases}$$

est 2. Le nombre de variables étant $n = 3$, la dimension de P est au plus $3 - 2$. Maintenant P contient par exemble les $p = 2$ points affinement indépendants : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc la dimension de P est au moins 1. Et finalement, la dimension est bien 1 puisqu'elle ne peut pas excéder 1.

3.4.3 Faces, facettes

Pour décrire les faces d'un polyèdre P il suffit de considérer les inégalités définissant le polyèdre et d'en serrer (transformer en égalité) quelques-unes. Plus précisément, F est une face de P si et seulement si $\exists J \subset I$ t.q. $F = P \cap \left\{x : a^i x = b_i \; i \in J\right\}$. Les facettes de P sont les faces de dimension égale à la dimension de P moins 1.

Dans l'ensemble $I^{\leq}$ des vraies inégalités c'est-à-dire des inégalités qui ne sont pas en fait des égalités, certaines peuvent être inutiles à la description de P. Une inégalité est dite redondante lorsque son retrait de la description de P ne change pas P. Au contraire le retrait d'une inégalité non redondante modifie le polyèdre : $j \in I^{\leq}$ et

$$P \neq \left\{x : \quad a^i x = b_i \quad i \in I^=, \quad a^i x \leq b_i \quad i \in I^{\leq} \backslash \{j\}\right\}$$

On montre que de telles inégalités induisent des facettes de P c'est-à-dire $F = P \cap \left\{x : a^j x = b_j\right\}$ est une facette de P. Les inégalités qui n'induisent pas des facettes sont donc redondantes et peuvent être éliminées de la description de P.

Pour déterminer les facettes, on pourrait donc retirer une à une les inégalités et voir si le polyèdre s'agrandit ou pas. Le problème se pose différemment lorsque le polyèdre est défini comme enveloppe convexe de points. Dans ce cas, le polyèdre est defini de façon implicite et on ne dispose pas généralement de sa description complète par un ensemble d'inégalités. On dispose seulement d'un ensemble partiel d'inégalités valides parmi lesquelles on voudrait savoir celles qui induisent ou pas des facettes.

Pour déterminer si une inégalité $j \in I^{\leq}$ induit une face $F = P \cap \left\{x : a^j x = b_j\right\}$ de P qui est une facette, on peut revenir à la définition de la dimension d'un convexe et chercher le nombre maximum p de points affinement indépendants de F. $p-1$ est la dimension de F et si $p-1$ est égal à la dimension de P moins 1, F est une facette.

Le théorème suivant propose une alternative. L'idée est de chercher les équations de tous les hyperplans qui contiennent F et voir si elles s'obtiennent comme combinaison linéaire des équations des hyperplans contenant P et de l'équation $\left\{a^j x = b_j\right\}$ servant à définir F.

Théorème 3.2 *Soit F une face de P définie par $F = P \cap \left\{x : a^j x = b_j\right\}$ $(j \in I^{\leq})$ et soit un hyperplan $H = \{x : gx = \beta\}$ contenant F. F est une facette de P si et seulement si il exite des scalaires λ_i $i \in I^{=}$ et μ tels que $(g, \beta) = \mu(a^j, b_j) + \sum_{i \in I^{=}} \lambda_i (a^i, b_i)$.*

Dans cette approche (g, β) sont les inconnues du système $gx = \beta$ où x parcourt les points de F qui sont les paramètres (les données) du système. F est une facette si et seulement si les solutions de ce système sont de la forme $(g, \beta) = \mu(a^j, b_j) + \sum_{i \in I^{=}} \lambda_i (a^i, b_i)$.

Exemple : le Quadric Polytope QP_2. On considère, dans $\mathbb{R}^3$, l'enveloppe convexe P des 4 points suivants : $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. L'inégalité $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$ est valide pour ces 4 points et donc valide pour leur enveloppe convexe P. Montrons que cette inégalité induit une facette de P. Soient $F = P \cap \{x : x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$ et $H = \{x : g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = \beta\}$ un hyperplan contenant F. Les 3 derniers points sont dans F et donc dans H. Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} g_1 & & & = \beta \\ & g_2 & & = \beta \\ g_1 + & g_2 + & g_3 & = \beta \end{cases}$$

On en déduit que $g_1 = \beta$, $g_2 = \beta$ et $g_3 = -\beta$. Donc l'équation de H s'écrit en fait $\beta x_1 + \beta x_2 - \beta x_3 = \beta$ qui est la multiplication par β de l'équation $x_1 + x_2 - x_3 = 1$. On posant $\mu = \beta$ on en déduit par le théorème précédent que F est une facette de P. On en déduit par ailleurs que P est de dimension pleine i.e. 3, car les scalaires λ_i n'apparaissent pas dans l'équation de H ce qui revient à dire que $I^{=} = \emptyset$.

3.5 Algorithme de coupes

Revenons à notre problème en nombres entiers du début du chapître :

$$(P_{int}) = \begin{cases} \min cx \\ \text{sous les contraintes} \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{N}^n \end{cases}$$

On note X l'ensemble des solutions réalisables de (P_{int}). Ce sont les conditions d'intégrité sur les variables qui rendent le problème difficile. L'objectif de la démarche qui suit est d'améliorer la formulation du problème en intégrant de nouvelles contraintes dans le but idéal d'atteindre l'enveloppe convexe de X et de pouvoir retirer ainsi les conditions d'intégrité sur les variables.

1. Déterminer l'ensemble des contraintes d'égalité de $ConvX$.
2. Déterminer des inégalités valides et identifier les inégalités induisant des facettes .
3. Une fois ces égalités et inégalités identifiées les ajouter au programme mathématique.

L'ensemble des égalités n'est pas très volumineux puisqu'il ne peut y en avoir plus du nombre de variables n (si on élimine les égalités linéairement liées aux autres) pour des raisons de dimension. L'ensemble des inégalités valides pouvant être lui très important, on ne les ajoute pas toutes mais seulement un sous-ensemble que l'on détermine "au fil de l'eau" : c'est ce qu'on appelle un *algorithme de coupes.*

0. Choisir un polyèdre initial P contenant $ConvX$. On y met toutes les égalités et quelques inégalités comme celles qui sont dans la définition de X.
1. Résoudre le programme linéaire continu : $\min cx$ s.c $x \in P$. Soit x^* la solution du problème.
2. Ajouter quelques inégalités valides violées par x^* au polyèdre P. S'il n'y en a pas aller en 3 et sinon aller en 1.
3. Si x^* a des coordonnées fractionnaires, résoudre le programme linéaire en nombre entiers : $\min cx$ s.c $x \in P \cap \mathbb{N}^n$. Sinon STOP (P_{int}) est résolu.

La partie 2 consiste à rechercher des inégalités violées c'est-à-dire non satisfaites par x^*. Généralement on ajoute à P les inégalités les plus violées. La recherche d'inégalités valides et violées est ce qu'on appelle le *problème de séparation*.

L'algorithme dit de *Branch-and-Cut* est une extension de l'algorithme précédent dans lequel dans la partie 3 au lieu de résoudre le problème en nombres entiers, on "branche" et on réitère l'algorithme de coupes sur le nouveau problème "branché". Brancher signifie forcer une variable fractionnaire à ne pas aller au-delà du premier nombre entier inférieur ou au contraire à ne pas aller en deçà du premier nombre entier supérieur . Cela revient à faire un algorithme de type *Branch-and-Bound* dans lequel on rajoute des inégalités valides (coupes) en chacun des noeuds de l'arborescence de recherche.