Contraintes de complémentarité
Programmation quadratique

Option 2A

CORO

Alain Faye

Linear Complementary Problem

$$w - Mz = q \qquad (1)$$

$$w_j \geq 0, z_j \geq 0 \;\; j = 1, \dots, p \qquad (2)$$

$$w_j z_j = 0 \; j = 1, \dots, p \qquad (3)$$

Système 2*p* inconnues : w_j , z_j $\quad j = 1, \dots, p$

Les données : *M* une matrice *p*×*p* , *q* un *p*-vecteur

Solution de base complémentaire est une solution de base de (1)
avec pour chaque paire w_j, z_j une des 2 variables en base
Ce qui fait bien *p* variables en base soit autant que d'équations de (1)

Une solution de base complémentaire satisfait donc (3)
car l'une des deux variables w_j, z_j est nulle car hors-base.

Solution de base complémentaire est **réalisable** lorsque $w_j \geq 0, z_j \geq 0 \; \forall j$

Exemple

Soit le LCP défini par:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Trouver une solution telle que z_1, w_2 sont en base et z_2, w_1 hors-base

LCP

Si $q \geq 0$ alors $z = 0, w = q$ est solution de (1) , (2) , (3)
Sinon on introduit une variable $z_0 \geq 0$ sur chaque ligne de (1)
$w - Mz - \mathbf{1}z_0 = q$ (1')
Où $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
En posant $z_0 = max\{-q_i\colon\ i = 1, \dots, p\}$
$w = q + 1z_0 \geq 0$ et $z = 0$, on obtient une solution de (1') , (2) , (3)

Dans cette solution 2 variables $w_s = z_s = 0$ et $z_0 = -q_s > 0$

Solution de base réalisable presque complémentaire

- $(w \quad z \quad z_0)$ est solution de base réalisable de (1') , (2) , (3) , $z_0 \geq 0$
- z_0 est en base, toutes les paires $w_j, z_j\ j = 1, .., p$ ont une variable en base sauf

pour une paire *s* où les 2 variables w_s, z_s sont hors-base.

Exemple

Soit le LCP défini par:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $z_0 = max\{-q_i : i = 1,2\}$
Poser z=0. En déduire w.
Vérifier que $w_1 = 0$

LCP algorithme du pivot de Lemke

L'algorithme du pivot de Lemke résout le problème LCP,

en passant de base réalisable presque complémentaire

en base réalisable presque complémentaire jusqu'à ce que z_0 sorte de la base

Quand z_0 sort de base elle s'annule et (1) , (2) , (3) est résolu

LCP algorithme du pivot de Lemke

Si $q \geq 0$ STOP LCP est résolu avec $w = q, z = 0$
Initialiser le tableau avec la solution de base: $w = q$ en base et $z = 0, z_0 = 0$ hors-base
Soit $s = argmax\{-q_i\colon\ i = 1, \dots, p\}$, pivoter à la ligne *s* et la colonne z_0: la variable w_s sort de base et z_0 entre en base.
Poser $y_s = z_s$
<u>Itérations</u>:
1. La variable y_s va entrer en base. Il faut trouver la variable sortante.
   Soit d_s la colonne du tableau sous la variable y_s. Si $d_s \leq 0$ aller en 2.
   Soit $r = \underset{1 \leq j \leq p}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\overline{q_j}}{d_{js}}\colon\ d_{js} > 0 \right\}$ où $\bar{q}$ est le membre droit du tableau.
   Pivoter à la ligne r et la colonne y_s : y_s entre en base et la variable à la ligne *r* sort
   Si la variable sortante est w_l alors poser $y_s = z_l$ et aller en 1.
   Si la variable sortante est z_l alors poser $y_s = w_l$ et aller en 1.
   Si la variable sortante est z_0 alors STOP LCP est résolu.
2. On a détecté un rayon. LCP est non résolu.

Exemple

Soit le LCP défini par:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Faire tourner l'algorithme du pivot de Lemke

LCP algorithme du pivot de Lemke

Soit un point $(w^* \quad z^* \quad {z_0}^*)$ satisfaisant (1') , (2) , (3) , $z_0 \geq 0$,

un **rayon** est un (p+1)-vecteur Δ
tel que $(w^* \quad z^* \quad {z_0}^*) + \lambda\Delta$ vérifie (1') , (2) , (3) , $z_0 \geq 0, \forall\lambda \geq 0$

Quand on sort de l'algorithme par 2. on obtient un rayon Δ en mettant :
1 dans la coordonnée correspondant à y_s la variable qui rentre et
$-d_s$ pour les coordonnées des variables de base et 0 ailleurs

Exemple

Soit le LCP défini par:

$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Faire tourner l'algorithme du pivot de Lemke
Donner le rayon rencontré
Vérifier que ce LCP n'a pas de solution

LCP algorithme du pivot de Lemke

Déf: Matrice carrée M est copositive ssi $z^t M z \geq 0 \; \forall z \geq 0$
M est copositive-plus si de plus $z^t M z = 0$ and $z \geq 0 \Rightarrow (M + M^t) z = 0$

Théorème
Si *M* est *co-positive plus* alors l'algorithme du pivot de Lemke
- produit une solution de (1) , (2) , (3) si (1) , (2) admet une solution
- détecte un rayon si (1) , (2) n'admet pas de solution.

Conditions de KKT

Soit le problème (P):

$$\min_x f(x)\ s.c.\ g_i(x) \le 0 \ \ i = 1, \dots, m$$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$$

$\lambda_i g_i(x) = 0$ $\quad$ *i*=1,…,*m*

$\lambda_i \ge 0$ $\quad$ *i*=1,…,*m*

Les conditions de KKT sont des conditions nécessaires d’optimalité locale si x est qualifié

Les conditions de KKT sont des <u>conditions suffisantes d’optimalité globale</u> sous des conditions de convexité:
x^* est un minimum global si x^* satisfait les contraintes de (P) et KKT et
$f, g_i\ \forall i = 1, \dots, p\ tel\ que\ g_i(x^*) = 0$ sont convexes

Conditions de KKT

Notons S l'ensemble des solutions réalisables du problème (P)

$$\mathrm{S} = \{x : \; g_i\,(x) \leq 0 \;\; i = 1, \dots, m\}$$

Théorème de Arrow, Hurwicz, Uzawa:
si $g_i \; i = 1, \dots m$ sont de classe C^1 et concaves alors tout point de S est qualifié

Dans ce cas les conditions de KKT sont des <u>conditions nécessaires d'optimalité</u> locale (et donc globale) pour tout point $x \in S$

Programmation quadratique

On considère le problème (Q) suivant :

$$\min_x c^t x + \frac{1}{2} x^t H x$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

n variables $x \geq 0$, m contraintes linéaires, A matrice m×n, b m-vecteur
c n-vecteur , H matrice symétrique n×n

On rajoute une variable d'écart $y_i \geq 0$ pour chaque contrainte i=1,…,m
On écrit les contraintes de (Q) et les conditions de KKT :

$$Ax + y = b$$
$$c + Hx + A^t u - v = 0$$
$$u \geq 0, v \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$$
$$x_i v_i = 0 \; i=1,\dots,n, \; y_i u_i = 0 \; i=1,\dots,m$$

Programmation quadratique

Contraintes de (Q) + KKT

$$Ax + y = b$$
$$-Hx - A^t u + v = c$$
$$u \geq 0, v \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$$
$$x_i v_i = 0 \; i=1,\ldots,n, \; y_i u_i = 0 \; i=1,\ldots,m$$

En posant :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A^t & H \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

On obtient un système LCP que l’on peut résoudre par l’algorithme du pivot de Lemke

Exercices

Soit le problème quadratique:

$$\min {x_1}^2 + {x_2}^2 + x_1 - 2x_2 \text{ s.c.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ecrire les conditions de KKT
Résoudre le problème par l'algorithme du pivot de Lemke

Soit le problème quadratique:

$$\min {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1x_2 + x_1 - 2x_2 \text{ s.c.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ecrire les conditions de KKT
Appliquer l'algorithme du pivot de Lemke pour les résoudre
Donner l'expression du rayon rencontré
Montrer que le problème a un optimum non borné