Décomposition de Benders

ENSIIE-MPRO

Alain Faye

Un exemple – Programmation stochastique

Soit le problème (Pb) en variables mixtes:

$$\max_{x,y} cx + hy$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b \\ x \in X \,, y \geq 0 \end{cases}$$

Avec $X \subseteq \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$.

Supposons h, A, G, b paramètres soumis à des aléas
k=1 à K scenarios possibles de probabilités p_k
Et les paramètres associés h_k, A_k, G_k, b_k
On introduit une variable y_k relative à chaque scenario k

On minimise la valeur moyenne

$$\max_{x \in X, y_k \; k=1,\dots,K} cx + \sum_{k=1}^{K} p_k h_k y_k$$

$$\begin{cases} A_k x + G_k y_k \leq b_k \\ \quad y_k \geq 0 \end{cases} \quad k = 1, \dots, K$$

Pour x fixé, le problème se décompose en K sous-problèmes indépendants

Principes de la décomposition de Benders

Soit le problème (Pb):
$\mathrm{Max}_{x,y}\ cx+hy$
s.c. $Ax+Gy \leq b$, $y \geq 0$, $x \in X$
Avec $X \subseteq \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$.

Si beaucoup de variables y il peut être intéressant de les éliminer

On réécrit (Pb) en ajoutant une variable t et une contrainte:
$\mathrm{Max}_{x,t}\ cx + t$
s.c. $t \leq \max_y hy$,
$\quad Gy \leq b - Ax$, $y \geq 0$, $x \in X$

Pour éliminer y , on passe au dual du sous-problème $\max_y$

$\mathrm{Max}_{x,t}\ cx + t$
s.c. $t \leq \min_u u(b - Ax)$ (1)
$\quad uG \geq h$, $u \geq 0$, $x \in X$

Pour x fixé , examinons le sous-problème $\min_u$

$\min_u u(b - Ax)$,
s.c. $uG \geq h$, $u \geq 0$

<u>Cas optimum fini</u>

De façon évidente, on a:
$\min_u u(b - Ax) \leq u(b - Ax) \; \forall u$ t.q. $uG \geq h$, $u \geq 0$

Donc on peut remplacer la contrainte (1) $t \leq \min_u u(b - Ax)$
par l'ensemble de contraintes :

$t \leq u(b - Ax) \; \forall u$ t.q. $uG \geq h$, $u \geq 0$

Pour x fixé , examinons le sous-problème $\min_u$

$\min_u u(b - Ax)$,

s.c. $uG \geq h$, $u \geq 0$

<u>Cas optimum non fini (-∞)</u>

Le dual a un optimum non borné est équivalent à le primal n'a pas de solution réalisable.

$Gy \leq b-Ax$, $y \geq 0$ a une solution si et seulement si :

$\mathrm{Min}_{s,y}\ s$

s.c. $Gy-\mathbf{1}s \leq b-Ax$, $y \geq 0$, $s \geq 0$ (s scalaire et **1** vecteur constitué de 1)

est ≤ 0

-Min s = Max -s

En prenant le dual de ce problème on obtient :

$Gy \leq b-Ax$, $y \geq 0$ a une solution si et seulement si :

$\mathrm{Min}_v\ v(b-Ax)$

s.c. $vG \geq 0$, $\Sigma_j v_j \leq 1$, $v \geq 0$

est ≥ 0

Donc, les contraintes de la forme

$$\mathbf{v(b - Ax) \geq 0 \text{ avec } vG \geq 0 \text{ , } \Sigma_j v_j \leq 1 \text{ , } v \geq 0}$$

Permettent d'éliminer les x t.q. $Gy \leq b - Ax$, $y \geq 0$ n'a pas de solution

Finalement, le problème (Pb) peut se réécrire:

$\mathrm{Max}_{x\,,\,t}\ cx + \mathbf{t}$

s.c. $\mathbf{t} \leq$ $\mathbf{u(b - Ax)\ \forall u\ t.q.\ uG \geq h\ ,\ u \geq 0}$

$\mathbf{v(b - Ax) \geq 0\ \forall v\ t.q.\ vG \geq 0\ ,\ \Sigma_j v_j \leq 1\ ,\ v \geq 0}$

$x \in X$

On a éliminé y mais on a rajouté énormément de contraintes. Donc il faut avoir recours à un <u>algorithme de coupes</u> dans lequel on introduit les coupes au fur et à mesure si elles sont nécessaires.

Algorithme de génération de coupes de Benders

Algorithme de coupes

$U^0=\emptyset$, $V^0=\emptyset$, itération $i=0$

(1) Résoudre : $\mathrm{Max}_{x,t}\ cx + t$ s.c. $t \leq u(b-Ax)\ \forall u \in U^i$, $v(b-Ax) \geq 0\ \forall v \in V^i$, $x \in X$

(2) Soit x*,t la solution

$z:=\min_u u(b-Ax^*)$
s.c. $uG \geq h$, $u \geq 0$

Si $z>-\infty$ alors
soit u la solution ,
Si $t>z$ alors ajouter u à U^i : $U^{i+1} = U^i \cup \{u\}$
Sinon STOP (Pb) est résolu

Sinon soit v t.q. $v(b-Ax^*)<0$ avec $vG \geq 0$, $\Sigma_j v_j \leq 1$, $v \geq 0$
Ajouter v à V^i : $V^{i+1} = V^i \cup \{v\}$

$i = i+1$ et retourner en (1)

Encadrement

A chaque itération i,
- la résolution du pb maitre (1) fournit un majorant UB de l'optimum de (Pb)

- la résolution du sous-pb (2) fournit une solution réalisable de (Pb) et donc un minorant LB

Soit x*, t solution du pb maitre (1), z valeur du sous-pb (2) pour x*, on a :

$cx^* + z \leq$ valeur de (Pb) $\leq cx^*+t$

A chaque itération i , on met à jour le meilleur minorant $LB:=\max(LB,cx^*+z)$

Et on a :

$LB \leq$ valeur de (Pb) $\leq cx^*+t$

Quand l'encadrement est suffisamment serré , on peut arrêter l'algorithme.

Finitude de l'algorithme

La finitude de l'algorithme est assuré par le fait qu'un polyèdre a un nombre fini de points extrêmes et qu'une forme linéaire atteint son optimum en un point extrême

Ici les polyèdres à considérer sont :

$uG \geq h$, $u \geq 0$ (quand $z > -\infty$)

$vG \geq 0$, $\Sigma_j v_j \leq 1$, $v \geq 0$ (quand $z = -\infty$)

Au pire l'algorithme explorera tous les points extrêmes de ces deux polyèdres

Extension:

On a considéré un problème (Pb) linéaire en x.

Max $cx+hy$
s.c. $Ax+Gy \leq b$, $y \geq 0$, $x \in X$
Avec $X \subseteq R^n$ et $y \in R^m$.

Mais la méthode s'étend bien sûr à des problèmes plus généraux de la forme:

Max $f(x)+hy$
s.c. $g(x)+Gy \leq b$, $y \geq 0$, $x \in X$
Avec $X \subseteq R^n$ et $y \in R^m$.
Avec $f(x)$ fonction scalaire et $g(x)$ vecteur de fonctions

Ce qui est important c'est d'avoir la linéarité en y.

Cas de multiples sous-problèmes indépendants

$$\max_{x\in X, y_k \geq 0\ k=1,\dots,K} cx + \sum_{k=1}^{K} h_k y_k \quad s.c.\ \{A_k x + G_k y_k \leq b_k\ , k = 1, \dots, K$$

Il est naturel de formuler le problème comme suit :

$$\max_{x\in X,\ t_k\ k=1,\dots,K} cx + \sum_{k=1}^{K} t_k$$

$$\begin{cases} t_k \leq \max_{y_k \geq 0} h_k y_k \\ s.c.\ G_k y_k \leq b_k - A_k x \end{cases} \quad k = 1, \dots, K$$

Ensuite on travaille sur les duaux des sous-problèmes
Dans l'algorithme de coupes, on génère une contrainte par sous-problème

Exercice:

Soit le problème (Pb):

Max $x_1+x_2+y_1+2y_2$

s.c. $-x_1+x_2+y_1+y_2 \leq 1$

$-\frac{1}{2}x_2-y_1+y_2 \leq 0$

$x_i \in \{0,1\}$ $i=1,2$; $y_i \geq 0$ $i=1,2$

1-Ecrire le sous-problème et son dual.
2-Résoudre (Pb) par la méthode de décomposition de Benders et l'algorithme de génération de coupes en prenant pour coupe initiale $t \leq 10$

Coupes pareto-optimales

Coupes pareto-optimales

$U=\{u: uG \geq h , u \geq 0 \}$ sol. réalisables du sous-pb dual
$x^* \in X$

Coupe de Benders (variables t , x): **$t \leq u^*(b - Ax)$**
où u* solution du problème $\min_{u \in U} u(b - Ax^*)$

Si plusieurs solutions optimales, il vaut mieux en choisir une « bonne ».

Notons pour la suite $g(x)=b - Ax$ (application affine)

Coupe dominée
u est dominée s'il existe $u' \in U$ tel que $u'g(x) \leq ug(x)$ $\forall x \in X$ et avec une inégalité stricte pour au moins un $x \in X$

Coupe pareto-optimale
u* est pareto-optimale si u* n'est pas dominée

Exemple:

$X = \{(1,1)^T , (1,-1)^T\}$
$g(x) = (x_1,x_2)^T$
$u^1=(2,1)$, $u^2=(1,2)$, $u^3=(1,3)$

x	$(1,1)^T$	$(1,-1)^T$
$u^1g(x)$	3	1
$u^2g(x)$	3	-1
$u^3g(x)$	4	-2

u^1 n'est pas dominée par u^3

Par contre, u^1 est dominée par u^2

On note X^C l'enveloppe convexe de X
On note riX^C l'intérieur relatif de X^C

On note $U(x^*)$ l'ensemble des solutions optimales du problème
$\min_{u \in U} u(b - Ax^*) = ug(x^*)$

Théorème
Soient $x^0 \in riX^C$, u^0 solution optimale de $\min_{u \in U(x^*)} u(b - Ax^0) = ug(x^0)$
Alors u^0 est pareto-optimale.

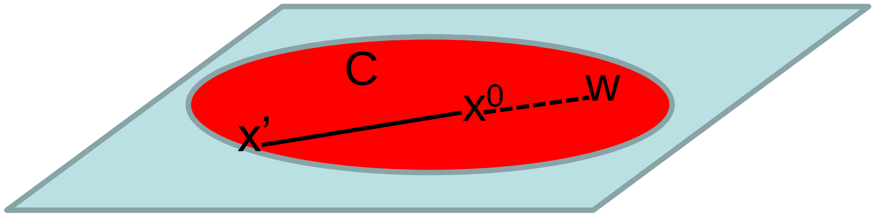
Note pratique:
pour résoudre $\min_{u \in U(x^*)} ug(x^0)$

il suffit de résoudre $\min\{ ug(x^0) : u \in U \text{ et } ug(x^*) = u^*g(x^*) \}$
où $u^* \in U(x^*)$

Pour démontrer le théorème, on a besoin du résultat suivant:

<u>Lemme d'accessibilité:</u> soit un convexe C , $x' \in C$ et $x^0 \in \mathrm{ri}C$,
$\exists \alpha > 1$ t.q. $x' + \alpha(x^0 - x') \in C$

Le segment $[x', x^0]$ peut être prolongé au-delà de x^0 dans C



C convexe en rouge

Démonstration du théorème:

Supposons u^0 dominée par un $u' \in U$:

$u'g(x) \leq u^0 g(x)\ \forall x \in X$ et $u'g(x') < u^0 g(x')$ pour un $x' \in X$

1-Montrer que $u' \in U(x^*)$

2-Montrer que $\forall w \in X^C\ u'g(w) \leq u^0 g(w)$ (écrire $w=\sum_i \lambda^i x^i$ avec $\sum_i \lambda^i=1$ et $\lambda^i \geq 0$ et $x^i \in X$)

3-Montrer que $u'g(x^0) = u^0 g(x^0)$ (remarquer que $x^0 \in X^C$ et utiliser l'étape 1)

4-Montrer qu'il existe $w \in X^C$ tel que $u'g(w) > u^0 g(w)$ (utiliser le lemme d'accessibilité)

5-Déduire de l'étape 2 que u^0 ne peut pas être dominée

Démonstration du théorème:

Supposons u^0 dominée par un $u' \in U$:

$u'g(x) \leq u^0 g(x)\ \forall x \in X$ **(A)** et $u'g(x') < u^0 g(x')$ pour un $x' \in X$ **(B)**

1-Montrer que $u' \in U(x^*)$

On prend $x=x^*$ (A) $\Rightarrow u'g(x^*) \leq u^0 g(x^*)$ alors $u° \in U(x^*) = \mathrm{argmin}_{u \in U}\, ug(x^*) \Rightarrow u' \in U(x^*)$

2-Montrer que $\forall w \in X^C$ $u'g(w) \leq u^0 g(w)$ (écrire $w=\sum_i \lambda^i x^i$ avec $\sum_i \lambda^i = 1$ et $\lambda^i \geq 0$ et $x^i \in X$)

g affine et (A) $\Rightarrow \sum_i \lambda^i [\, u'g(x^i) \leq u^0 g(x^i)\,] = [\, u'g(\sum_i \lambda^i x^i) \leq u^0 g(\sum_i \lambda^i x^i)\,]$

3-Montrer que $u'g(x^0) = u^0 g(x^0)$ (remarquer que $x^0 \in X^C$ et utiliser l'étape 1)

$x^0 \in X^C$ et étape 2 $\Rightarrow u'g(x^0) \leq u^0 g(x^0)$

$u' \in U(x^*)$ et $u^0 = \mathrm{argmin}_{u \in U(x^*)}\, ug(x^0) \Rightarrow u'g(x^0) \geq u^0 g(x^0)$

4-Montrer qu'il existe $w \in X^C$ tel que $u'g(w) > u^0 g(w)$ (utiliser le lemme d'accessibilité)

étape 3 et (B) et $\exists \alpha > 1$ $\alpha x^0 + (1-\alpha)x' \in X^C$ (lemme) et g affine $\Rightarrow$

$\alpha \times [u'g(x^0) = u^0 g(x^0)] + (1-\alpha) \times [u'g(x') < u^0 g(x')] = [u'g(\alpha x^0 + (1-\alpha)x') > u^0 g(\alpha x^0 + (1-\alpha)x')]$

5-Déduire de l'étape 2 que u^0 ne peut pas être dominée

Exemple (suite):

$X = \{(1,1)^T , (1,-1)^T\}$, $g(x) = (x_1,x_2)^T$

$U=\{u\in R_+^2: u_1\geq 1, u_1+u_2\geq 3, u_2\leq 3\}$

Le sous-problème est $\min_{u\in U} ug(x)$

Exemple (suite):

$X = \{(1,1)^T , (1,-1)^T\}$, $g(x) = (x_1,x_2)^T$
$U=\{u\in R_+^2: u_1\geq 1, u_1+u_2\geq 3, u_2\leq 3\}$
Le sous-problème est $\min_{u\in U} ug(x)$

- Pour $x^*=(1,1)^T$

$\min u_1+u_2$ s.c $u\in U$
La valeur optimale est 3
Plusieurs solutions optimales: par exemple $u^1=(2,1)$

On cherche une coupe pareto-optimale.
$x^0=½ (1,1)^T + ½ (1,-1)^T=(1,0)^T \in riX^C$
Résolvons $\min_{u\in U(x^*)} ug(x^0)=\min u_1$ s.c. $\{u\in U$ et $u_1+u_2 =3\}$
Une solution optimale (unique) $u^2=(1,2)$

Exemple (suite):

$X = \{(1,1)^T , (1,-1)^T\}$, $g(x) = (x_1,x_2)^T$
$U=\{u\in R_+^2: u_1\geq 1, u_1+u_2\geq 3, u_2\leq 3\}$
Le sous-problème est $\min_{u\in U} ug(x)$

- Pour $x^*=(1,1)^T$

$\min u_1+u_2$ s.c $u\in U$
La valeur optimale est 3
Plusieurs solutions optimales: par exemple $u^1=(2,1)$

On cherche une coupe pareto-optimale.
$x^0=½ (1,1)^T + ½ (1,-1)^T=(1,0)^T \in riX^C$
Résolvons $\min_{u\in U(x^*)} ug(x^0)=\min u_1$ s.c. $\{u\in U$ et $u_1+u_2 =3\}$
Une solution optimale (unique) $u^2=(1,2)$

- Pour $x^*=(1,-1)^T$

$\min u_1-u_2$ s.c $u\in U$
La valeur optimale est -2
Une seule solution optimale: $u^3=(1,3)$
Donc pareto-optimale

Comment trouver $x° \in \text{ri}X^C$?

- Dans les cas où l'on sait décrire X^C par un polyèdre:
  x° doit satisfaire strictement les inégalités le décrivant

  - ✓ $X=\{x: x_i \geq 0$ et entier $i=1,\ldots n\}$
    Prendre x° avec des coordonnées $x_i° > 0$

  - ✓ $X=\{x: x_i=0$ ou $1 \quad i=1,\ldots n\}$
    Prendre x° avec des coordonnées $0 < x_i° < 1$

  - ✓ $X=\{x: x_i=0$ ou $1 \quad i=1,\ldots n \; \Sigma_i \, x_i \leq k\}$ avec $k<n$.
    Prendre x° avec des coordonnées $x_i° = k/2n$

- Si X est un ensemble fini de points $X=\{x^1, x^2,\ldots,x^p\}$
  Prendre une combinaison convexe stricte (poids >0).
  Par exemple: $x° = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x^i$
  Sinon prendre une combinaison convexe stricte (poids >0) d'un nombre fini de points de X dont le point x* .
  On aura ainsi la pareto-optimalité de u° sur au moins une partie de X

Exercice:

Soit le problème (Pb):

Max $x_1+2x_2+{}^3/_2 y_1+2y_2$

s.c. $\quad {}^3/_2 x_1+x_2+y_1+y_2 \leq 2$

$x_1-x_2+y_1+2y_2 \leq 1$

$x_i \in \{0,1\}$ i=1,2 ; $y_i \geq 0$ i=1,2

1-Ecrire le sous-problème et son dual.
2-Résoudre (Pb) par la méthode de décomposition de Benders et l'algorithme de génération de coupes en prenant pour contrainte initiale $t \leq 10$. A l'itération 2, générer une coupe pareto-optimale .

Bibliographie

Frans Schalekamp (frans@wm.edu)
Stochastic Optimization. L-Shaped Method
CSci 688 Spring 2015

Thomas L. Magnanti and Richard T.Wong
Accelerating Benders decomposition : algorithmic enhancements and model selection criteria. OR 093-79
Operation Research Center, Massachusetts Institute of Technology, October 1979