TD décomposition de Benders

Décomposition de Benders. Algorithme des coupes de Benders.

Soit (P) le problème en variables mixtes suivant :

$\max z = x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}y_1 + 2y_2$

Sous les contraintes $\begin{cases} \frac{3}{2}x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 + y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ x \in X = \{0,1\}^2, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$

1° Ecrire SP(x) le sous-problème en x (fixé) et son dual DSP(x). On notera u_1, u_2 les variables duales.
2° Appliquer la méthode de décomposition de Benders et l'algorithme de coupes. On mettra $t \leq 10$ comme coupe initiale.
Pour résoudre DSP(x), on utilisera l'algorithme du simplexe. On partira de la base u_1, u_3 (variable d'écart).
3° A la fin de l'algorithme, donner la solution de (P).
4° A la dernière itération de l'algorithme des coupes de Benders, vérifier que le dual du sous-problème admet plusieurs solutions optimales. Ecrire le sous-problème qui permet d'obtenir une coupe de Benders pareto-optimale et le résoudre. Comparer la coupe de Benders obtenue avec celle obtenue à la question 2.

Correction

1° Le sous-problème est :

$$SP(x) = \max_y \frac{3}{2}y_1 + 2y_2$$

Sous les contraintes $\begin{cases} y_1 + y_2 \leq 2 - \frac{3}{2}x_1 - x_2 \\ y_1 + 2y_2 \leq 1 - x_1 + x_2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$

Le dual est

$$DSP(x) = \min_u u_1\left(2 - \frac{3}{2}x_1 - x_2\right) + u_2(1 - x_1 + x_2)$$

Sous les contraintes $\begin{cases} u_1 + u_2 \geq \frac{3}{2} \\ u_1 + 2u_2 \geq 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$

2° Algorithme des coupes de Benders

Itération 0.

On résout le problème maître :

$\max z = x_1 + 2x_2 + t$

Sous les contraintes $\begin{cases} t \leq 10 \\ x \in \{0,1\}^2 \end{cases}$

On trouve rapidement $x_1 = x_2 = 1$ et $t = 10$.

On résout donc DSP(1,1).

$$DSP(1,1) = \min_u w = -\frac{1}{2}u_1 + u_2$$

Sous les contraintes $\begin{cases} u_1 + u_2 \geq \frac{3}{2} \\ u_1 + 2u_2 \geq 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$

On le résout par l'algorithme primal du simplexe. On rajoute les variables d'écart u_3, $u_4 \geq 0$. Les contraintes deviennent.

$$\begin{cases} u_1 + u_2 - u_3 = \frac{3}{2} \\ u_1 + 2u_2 - u_4 = 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0 \end{cases}$$

Partons, par exemple, de la solution de base $u_1=2$, $u_3=\frac{1}{2}$ $u_2=u_4=0$. On obtient le tableau suivant :

Base	U1	U2	U3	U4	
U3	0	1	1	-1	= ½
U1	1	2	0	-1	= 2
	0	2	0	-1/2	= 1 + w

On minimise donc on cherche une variable de coût réduit <0. On trouve u_4. u_4 rentre en base. Dans la colonne u_4 sur les lignes correspondant aux deux contraintes, il n'y a pas de coefficient >0 donc le minimum est non borné ($-\infty$) car la variable u_4 peut augmenter indéfiniment sans que les variables de base u_1 et u_3 ne deviennent <0. Cherchons cette direction *v* de décroissance.
D'après le tableau, on a :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 - u_4 = 2 \\ u_2 + u_3 - u_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

En fixant $u_2=0$ on obtient :

$$\begin{cases} u_1 = 2 + u_4 \\ u_3 = \frac{1}{2} + u_4 \end{cases}$$

Du coup, partant du point courant $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et en allant dans la direction donnée par le vecteur *v* de coordonnée $v_4=1$, et $v_1=1$, $v_3=1$, $v_2=0$ on reste réalisable et la fonction w décroît. Les coefficients $v_1=1$, $v_3=1$ de cette direction s'obtiennent en faisant passer la colonne de la variable u_4 de l'autre côté du signe = i.e. en prenant les opposés des coefficients dans la colonne u_4.

Les points de la demi-droite $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ satisfont les deux contraintes d'égalité et les quatre contraintes de non-négativité quelque-soit $\alpha \geq 0$. On peut vérifier aussi que la fonction objectif dans cette direction s'écrit $w = -1 - \frac{1}{2}\alpha$ qui décroît indéfiniment quand α tend vers $+\infty$.

On revient à notre problème à 2 variables u_1 et u_2. On a trouvé une direction $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ du polyèdre des contraintes du dual DSP(x). Donc on va rajouter la coupe de Benders : $1 \times \left(2 - \frac{3}{2}x_1 - x_2\right) + 0 \times (1 - x_1 + x_2) \geq 0$ afin de ne plus avoir de fonction objectif du dual qui décroisse dans cette direction.

Itération 1.
On résout le problème maître :
$\max z = x_1 + 2x_2 + t$

Sous les contraintes $\begin{cases} t \leq 10 \\ 2 - \frac{3}{2}x_1 - x_2 \geq 0 \\ x \in \{0,1\}^2 \end{cases}$

On trouve une nouvelle solution x_1=0, x_2=1 et t=10.

On résout donc DSP(0,1).

$$DSP(0,1) = \min_u w = u_1 + 2u_2$$

Sous les contraintes $\begin{cases} u_1 + u_2 \geq \frac{3}{2} \\ u_1 + 2u_2 \geq 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$

On le résout par l'algorithme primal du simplexe. On rajoute les variables d'écart u_3, u_4 ≥0.
Repartons de la solution de base u_1=2, u_3= ½ u_2=u_4=0. On obtient le tableau suivant :

Base	U1	U2	U3	U4	
U3	0	1	1	-1	= ½
U1	1	2	0	-1	= 2
	0	0	0	1	= -2 + w

Cette fois on voit que la base est optimale (coûts réduits≥0) et l'optimum est w=2.

On revient à notre problème à 2 variables u_1 et u_2. On a trouvé la solution u_1=2 et u_2=0.
Comme t=10 > w=2, on n'a pas fini et on va rajouter la coupe de Benders $t \leq 2 \times \left(2 - \frac{3}{2}x_1 - x_2\right) + 0 \times (1 - x_1 + x_2)$.
On note que l'on a un minorant de la valeur du problème (P) en additionnant la valeur de l'objectif en x=(0,1) du problème maître x_1+2x_2=2 et la valeur du sous-problème en x=(0,1) soit SP(0,1)=2 , ce qui fait au total 4.

Itération 2.
On résout le problème maître :
$\max z = x_1 + 2x_2 + t$

Sous les contraintes $\begin{cases} t \leq 10 \\ 2 - \frac{3}{2}x_1 - x_2 \geq 0 \\ t \leq 4 - 3x_1 - 2x_2 \\ x \in \{0,1\}^2 \end{cases}$

On trouve une nouvelle solution x_1=0 ,x_2=1 et t=2. La valeur du problème maître courant est 4. Comme on a atteint le minorant 4 de la valeur de (P) (voir au-dessus), on a résolu (P).

3° Reconstituer la solution de (P)
La solution est x_1=0, x_2=1 pour les variables *x*. Pour retrouver les variables *y* on peut utiliser les variables duales du sous-problème et les écarts complémentaires. On avait trouvé u_1=2 et u_2=0.
u_1 n'est pas nulle donc la première contrainte de SP(0,1) est saturée : y_1+y_2=1.
On voit aussi que la première contrainte du dual n'est pas saturée ce qui entraine que y_1=0.
D'où finalement y_1=0 et y_2=1.

On peut vérifier que les objectifs du primal et du dual coïncident $2=3/2y_1+2y_2$.

4° Coupe pareto-optimale

Dans le dernier tableau du simplexe du sous-problème, le coût réduit de la variable hors-base u_2 est nul. Donc on peut augmenter u_2 jusqu'à min{ ½ , 1}= ½ sans que la valeur de l'objectif ne change. Donc il y a de multiples solutions optimales.

Cherchons un point x° dans l'intérieur relatif de l'enveloppe convexe de X :

$$\frac{1}{4}\binom{0}{0}+\frac{1}{4}\binom{0}{1}+\frac{1}{4}\binom{1}{0}+\frac{1}{4}\binom{1}{1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Pour trouver une coupe de Benders pareto-optimale, on résout le problème suivant :

$$\min_u u_1\left(2-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+u_2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}u_1+u_2$$

$$\text{Sous les contraintes}\begin{cases} u_1+u_2\geq\frac{3}{2}\\ u_1+2u_2\geq 2\\ u_1+2u_2=2\\ u_1\geq 0, u_2\geq 0\end{cases}$$

On a rajouté la contrainte $u_1+2u_2=2$ pour chercher parmi les solutions optimales de DSP(0,1). La solution optimale unique est $u_1=1$ et $u_2=$ ½ . On trouve la coupe de Benders $t\leq\left(2-\frac{3}{2}x_1-x_2\right)+\frac{1}{2}(1-x_1+x_2)$ qui n'est pas dominée sur $X=\{0,1\}^2$.

Cependant le point $x=\binom{1}{1}$, on l'a vu, n'est pas réalisable pour (P).

Prenons x° dans l'intérieur relatif de l'enveloppe convexe des points de *X* privé de $\binom{1}{1}$:

$$\frac{1}{3}\binom{0}{0}+\frac{1}{3}\binom{0}{1}+\frac{1}{3}\binom{1}{0}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Cette fois, on doit minimiser la fonction suivante :

$$\min_u u_1\left(2-\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+u_2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{6}u_1+u_2$$

Sous les mêmes contraintes.

Ce qui donne comme solution optimale $u_2=$ ½ et $u_1=1$ et on retrouve la même coupe de Benders $t\leq\left(2-\frac{3}{2}x_1-x_2\right)+\frac{1}{2}(1-x_1+x_2)=\frac{1}{2}(5\ -4x_1-x_2)$.

Comparons les 2 coupes induites par $u_1=2$, $u_2=0$ et $u_1=1$, $u_2=$ ½ sur X :

(x_1,x_2)	$u=(2\quad 0);\ t\leq 2\left(2-\frac{3}{2}x_1-x_2\right)$	$u=(1\quad \frac{1}{2});\ t\leq\frac{1}{2}(5\ -4x_1-x_2)$
(0,0)	$t\leq 4$	$t\leq 2+\frac{1}{2}$
(1,0)	$t\leq 1$	$t\leq\frac{1}{2}$
(0,1)	$t\leq 2$	$t\leq 2$
(1,1)	$t\leq -1$	$t\leq 0$

La coupe induite par $u_1=2$ et $u_2=0$, n'est pas dominée et ce grâce au point *x*=(1,1). Par contre, si on retire ce point *x*=(1,1) qui, on l'a vu à la question 2, n'est pas réalisable, la coupe induite par $u_2=$ ½ et $u_1=1$ est bien plus intéressante, car le membre droit de l'inégalité est toujours inférieur ou égal.

Décomposition de Benders - Coupe pareto-optimale.

On considère le problème quadratique en 0-1 :

$$\max_x 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 \le x_3 \\ x_i \in \{0,1\}\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

On linéarise le problème :

$$\max_{x,y,t} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + t$$
$$\text{Sous contrainte} \begin{cases} t \le 5y_{12} + 3y_{13} + 4y_{23} \\ y_{12} \le x_1 \\ y_{12} \le x_2 \\ y_{13} \le x_1 \\ y_{13} \le x_3 \\ y_{23} \le x_2 \\ y_{23} \le x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 \le x_3 \\ y_{ij} \ge 0 \quad \forall 1 \le i < j \le 3 \\ x_i \in \{0,1\}\ i = 1,2,3 \\ t \ge 0 \end{cases}$$

Pour x fixé on note SP(x) le sous-problème :

$$\max_y 5y_{12} + 3y_{13} + 4y_{23}$$
$$\text{Sous-contrainte} \begin{cases} y_{12} \le x_1 \\ y_{12} \le x_2 \\ y_{13} \le x_1 \\ y_{13} \le x_3 \\ y_{23} \le x_2 \\ y_{23} \le x_3 \\ y_{ij} \ge 0 \quad \forall 1 \le i < j \le 3 \end{cases}$$

Q1- Ecrire DSP(x), le dual de SP(x) .

Q2- Pour x=(1,0,1) résoudre DSP(x) et montrer que l'inégalité $t \le x_1 + 9x_2 + 2x_3$ est une coupe de Benders.

Q3- Pour x=(1,0,1) DSP(x) admet plusieurs solutions optimales. Donner une coupe de Benders pareto-optimale.
La comparer avec la coupe précédente sur tous les x réalisables.

Correction.

Q1-

DSP(*x*), le dual de SP(*x*), s'écrit :

$$\min_{\alpha,\beta,\gamma} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 x_1 + \beta_3 x_3 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3$$

$$\text{Sous contrainte} \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 5 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 3 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 4 \\ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_3, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0 \end{cases}$$

Q2-

DSP(1,0,1)

$$\min_{\alpha,\beta,\gamma} \alpha_1 + \beta_1 + \beta_3 + \gamma_3$$

$$\text{Sous contrainte} \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 5 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 3 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 4 \\ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_3, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0 \end{cases}$$

Pour minimiser on prend $\alpha_1 = 0, \gamma_3 = 0$, dans l'objectif il reste $\beta_1 + \beta_3$. La 2ème contrainte implique $\beta_1 + \beta_3 = 3$. Donc la valeur optimale du problème est 3. Il y a plusieurs solutions : si on prend $\beta_1 = 1, \beta_3 = 2$, et $\alpha_2 = 5$, $\gamma_2 = 4$, on trouve la coupe $t \leq x_1 + 9x_2 + 2x_3$.

Q3-

L'ensemble des *x* réalisables est $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Considérons $x^0 = \begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ qui est dans l'intérieur (relatif) de l'enveloppe convexe des 5 points *x* réalisables. Pour l'obtenir : faire la combinaison convexe des 5 points avec 1/5 comme poids pour chacun.

Pour trouver une coupe pareto-optimale on résout :

$$\min_{\alpha,\beta,\gamma} \alpha_1 \frac{1}{5} + \alpha_2 \frac{2}{5} + \beta_1 \frac{1}{5} + \beta_3 \frac{3}{5} + \gamma_2 \frac{2}{5} + \gamma_3 \frac{3}{5}$$

$$\text{Sous contrainte} \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 5 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 3 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 4 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \beta_3 + \gamma_3 = 3 \\ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_3, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0 \end{cases}$$

C'est le problème DSP(x°) avec la contrainte pour récupérer les solutions optimales de DSP(1,0,1).
La valeur optimale du problème est 4,2. La solution est $\alpha_1 = 0,\ \gamma_3 = 0,\ \beta_1 = 3, \beta_3 = 0,\ \alpha_2 = 5$, $\gamma_2 = 4$. Ce qui donne la coupe $t \leq 3x_1 + 9x_2$.

Comparons les coupes, celle-ci et celle de la question précédente, sur les *x* réalisables.

x	Coupe pareto-optimale	Coupe question 2
(0,0,0)	t ≤ 0	t ≤ 0
(0,1,0)	t ≤ 9	t ≤ 9
(0,0,1)	t ≤ 0	t ≤ 2
(1,0,1)	t ≤ 3	t ≤ 3
(0,1,1)	t ≤ 9	t ≤ 11

On voit que la coupe pareto-optimale n'est pas dominée par la coupe de la question 2 (ce qui est prévu par le théorème de cours). La coupe de la question 2 est dominée mais cela est fortuit (le théorème ne prétend pas cela). Avec de la chance, on peut obtenir (sans le savoir) une coupe de Benders pareto-optimale sans passer par la procédure du théorème. Ici, ce n’est pas le cas.

Exercice3 : décomposition de Benders

Soit le graphe suivant :

G=(V,E) avec V={1,2,3,4} et l'ensemble des arcs E={(1,2),(1,3),(2,4),(2,3),(3,2),(3,4)}.

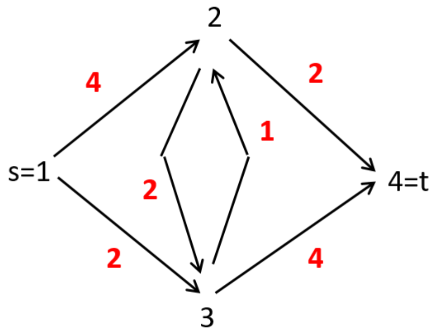
Chaque e∈E est valué par une valeur c_e>0 indiquée sur le dessin ci-dessous.

A chaque e est alloué une deuxième valeur d_e >0 donnée dans le tableau suivant :

e	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(2,3)	(3,2)	(3,4)
d_e	**1**	**5**	**5**	**4**	**3**	**1**

d_e peut être interprété comme un surcoût qui viendrait s'ajouter à la valeur c_e de l'arc e. Conférer le problème (Pb) ci-dessous et la suite.

On note s=1 et t=4.



On considère le problème (Pb) suivant :

$$\max_{x,y} y_4 - y_1$$

$$\text{Sous contraintes} \begin{cases} y_2 - y_1 \leq 4 + x_{12} \\ y_3 - y_1 \leq 2 + 5x_{13} \\ y_3 - y_2 \leq 2 + 4x_{23} \\ y_2 - y_3 \leq 1 + 3x_{32} \\ y_4 - y_2 \leq 2 + 5x_{24} \\ y_4 - y_3 \leq 4 + x_{34} \\ x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{32} + x_{24} + x_{34} \leq 2 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \ \forall (i,j) \in E, \quad y_i \in \mathrm{R} \ \forall i \in V \end{cases}$$

Pour x fixé, on considère le sous-problème SP(x) :

$$\max_{y} y_4 - y_1$$

$$\text{Sous contraintes} \begin{cases} y_2 - y_1 \leq 4 + x_{12} \\ y_3 - y_1 \leq 2 + 5x_{13} \\ y_3 - y_2 \leq 2 + 4x_{23} \\ y_2 - y_3 \leq 1 + 3x_{32} \\ y_4 - y_2 \leq 2 + 5x_{24} \\ y_4 - y_3 \leq 4 + x_{34} \\ y_i \in \mathrm{R} \ \forall i \in V \end{cases}$$

Notons que dans ce sous-problème les variables y n'ont pas de contrainte de signe.

Q1° - Ecrire DSP(x) le problème dual de SP(x). Les variables duales u_{ij} seront indexées par les arcs du graphe.

Attention : les variables y sans signe engendrent des contraintes d'égalité dans le dual.

Vérifier que DSP(x) est un problème de plus court chemin de s=1 à t=4. Donner les poids attachés aux arcs dans ce problème de plus court chemin. (4 pts)

On résout (Pb) par la méthode de décomposition de Benders. A une itération donnée, on a déjà généré 2 coupes de Benders et on a le problème maître suivant :

$$\max_{x,t} t$$

Sous contraintes $\begin{cases} t \leq 6 + x_{12} + 5x_{24} \\ t \leq 6 + 5x_{13} + x_{34} \\ x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{32} + x_{24} + x_{34} \leq 2 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \ \forall (i,j) \in E \end{cases}$

La solution optimale est $x_{13}=x_{24}=1$ (et les autres x nuls) et t=11.

Q2°- Résoudre DSP(x) pour la solution x optimale précédente du problème maître. Donner la coupe de Benders induite que l'on doit ajouter au problème maître. Et donner l'encadrement de la valeur de (Pb). (4 pts)

Exercice 3- Correction

Q1 (4 pt). DSP(x) est

$$\min_u z = u_{12}(4 + x_{12}) + u_{13}(2 + 5x_{13}) + u_{23}(2 + 4x_{23}) + u_{32}(1 + 3x_{32}) + u_{24}(2 + 5x_{24}) + u_{34}(4 + x_{34})$$

Sous contraintes $\begin{cases} -u_{12} - u_{13} = -1 & (1) \\ u_{12} + u_{32} - u_{23} - u_{24} = 0 & (2) \\ u_{13} + u_{23} - u_{32} - u_{34} = 0 & (3) \\ u_{24} + u_{34} = 1 & (4) \\ u_{12}, u_{13}, u_{32}, u_{23}, u_{24}, u_{34} \geq 0 \end{cases}$

On achemine un flot valant 1 de s=1 (équation (1)) à t=4 (équation (4)). Les équations (2) et (3) étant les lois de conservation du flot traversant les sommets 2 et 3. On cherche l'acheminement de moindre coût total. Les coûts ou poids sont associés à chaque arc et sont dans la fonction z : $(4 + x_{12})$ pour l'arc (1,2), $(2 + 5x_{13})$ pour l'arc (1,3) etc…

Q2 (4 pt).

Pour $x_{13}=x_{24}=1$ (et les autres x nuls), on doit résoudre DSP(x) c'est-à-dire chercher le plus court chemin de s=1 à t=4 pour les poids :

Arcs	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(3,2)	(2,4)	(3,4)
poids	4	7	2	1	7	4

Le plus court chemin est 1→2→3→4 et vaut 10. Autrement dit la solution optimale est :

$u_{12} = 1, u_{13} = 0, u_{32} = 0, u_{23} = 1, u_{24} = 0, u_{34} = 1$

La coupe de Benders à ajouter est donc $t \leq 10 + x_{12} + 4x_{23} + x_{34}$

Une borne inférieure de (Pb) est 10 car z=10 et il n'y a pas de coefficients sur les variables x dans l'objectif de (Pb).

La valeur du problème maître courant donne une borne supérieure de (Pb) et cette valeur est 11 car t=11 et il n'y a pas de coefficients associés aux variables x dans (Pb).

Commentaire. On peut interpréter ce problème de la façon suivante. Un joueur 1 (attaquant) dispose d'un budget pour pénaliser 2 arcs du graphe. Le joueur 2 doit se rendre du sommet 1 au sommet 4. Suite à l'attaque, le joueur 2 réagit toujours en choisissant le plus court chemin du sommet 1 au sommet 4. Au total, le joueur 1 cherche les 2 arcs qui maximiseront la valeur du plus court chemin (de 1 à 4).

Localisation d'entrepôt sans contraintes de capacité (Uncapicited Facility Location problem UFL)

Soient n entrepôts, m clients. Chaque client doit être affecté à un unique entrepôt. Un client ne peut être affecté à un entrepôt que si ce dernier est ouvert. Le coût d'ouverture d'un entrepôt j est c_j. Le coût de raccordement d'un client i à un entrepôt j est q_{ij}. On doit ouvrir des entrepôts (parmi les n disponibles) de telle sorte que les coûts d'ouverture et de raccordement des clients aux entrepôts est minimum. Le problème se modélise par un programme linéaire en variables 0-1 :

variables x_j=1 si entrepôt j est ouvert, =0 sinon ; y_{ij}=1 si le client i est raccordé à l'entrepôt j, =0 sinon.

($P^{UFL}_{0\text{-}1}$) $$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_{ij}$$

sous les contraintes $$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1 & i = 1, \dots, m \\ y_{ij} \leq x_j & i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \\ x_j, y_{ij} \in \{0,1\} & i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \end{cases}$$

La première famille de contraintes sont les contraintes d'affectation d'un client i (i=1 à m), à exactement un des entrepôts.
La deuxième famille impose que l'on ne peut raccorder un client i à un entrepôt j que si ce dernier est ouvert (x_j=1).

Attention, ici problème de minimisation, donc adapter le cours sur les coupes de Benders qui en maximisation.

Pour x (0-1) fixé, on peut relâcher la contrainte d'intégrité sur y sans rien changer. De plus, le problème de minimisation en y se décompose par client. On note $SP_i(x)$ le sous-problème relatif au client i.

$SP_i(x)$ $$\min_y \sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_{ij}$$

sous les contraintes $$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1 & \\ y_{ij} \leq x_j & j = 1, \dots, n \\ y_{ij} \geq 0 & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

On remarque que la solution de ce problème est de raccorder le client i à l'entrepôt ouvert (x_j=1) et de coût q_{ij} minimum.
On rappelle la notation $a^+ = \max\{0, a\}$.

Q1- Montrer que le dual de $SP_i(x)$ est le programme suivant :

$DSP_i(x)$ $$\max_{\lambda,\pi} \lambda_i - \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} x_j$$

Sous contraintes $$\begin{cases} \lambda_i - \pi_{ij} \leq q_{ij} & j = 1, \dots, n \\ \lambda_i \text{ sans signe}, \pi_{ij} \geq 0 & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Q2- Montrer que la solution du dual $DSP_i(x)$ est :

$$\lambda_i = \min\{q_{ij} : j \text{ t.q. } x_j = 1\}$$
$$\pi_{ij} = 0 \text{ si } x_j = 1, \pi_{ij} = (\lambda_i - q_{ij})^+ \text{ si } x_j = 0$$

Dans la solution précédente, si tous les x_j sont nuls (pas d'entrepôt ouvert) le min pour calculer λ_i est sur l'ensemble vide donc $\lambda_i=+\infty$. C'est donc que le primal $SP_i(x)$ n'a pas de solution (ce que l'on vérifie facilement).
On va chercher les coupes de Benders qui empêchent les x t.q. $SP_i(x)$ n'a pas de solution.

On met une variable artificielle $s \geq 0$ sur les contraintes de $SP_i(x)$ et l'on minimise s. Le minimum de s est $\leq 0 \Leftrightarrow SP_i(x)$ a une solution. Le dual de ce problème (minimiser s) est simplement $DSP_i(x)$ dans lequel on a remplacé le second membre des contraintes par 0 et ajouter une contrainte de normalisation du vecteur des variables duales. Ce qui donne :

$DSP_i°(x)$

$$\max_{\lambda,\pi} \lambda_i - \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} x_j$$

Sous contraintes $\begin{cases} |\lambda_i| + \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} \leq 1 \\ \lambda_i - \pi_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ \lambda_i \; sans\ signe, \pi_{ij} \geq 0 \; j = 1, \dots, n \end{cases}$

Q3- Vérifier que s'il y a au moins un $x_j=1$, le max est 0. Ce qui est normal car $SP_i(x)$ a toujours au moins une solution dans ce cas.

Vérifier que si $x_j=0$ $\forall j$ alors la solution optimale est $\lambda_i = \frac{1}{n+1} = \pi_{ij} \; \forall j = 1, \dots, n$.

En déduire la coupe de Benders $1 \leq \sum_{j=1}^{n} x_j$.

Revenons maintenant au cas où $SP_i(x)$ a une solution i.e. $x \neq 0$. A priori, il y a une coupe de Benders induite pour chaque vecteur x en 0-1 soit 2^n-1 (si on enlève le vecteur nul x=0).

On classe les q_{ij} j=1,…,n par ordre croissant $q_{ij_1} \leq q_{ij_2} \leq \cdots \leq q_{ij_n}$.

Q4- En vous appuyant sur la question 2, montrer que les coupes de Benders, relatives au sous-problème $SP_i(x)$, que l'on doit générer sont en nombre polynomial n et qu'elles sont de la forme :

$$\begin{cases} t_i \geq q_{ij_1} \\ t_i \geq q_{ij_2} - (q_{ij_2} - q_{ij_1}) x_{j_1} \\ t_i \geq q_{ij_3} - (q_{ij_3} - q_{ij_1}) x_{j_1} - (q_{ij_3} - q_{ij_2}) x_{j_2} \\ \vdots \\ t_i \geq q_{ij_n} - (q_{ij_n} - q_{ij_1}) x_{j_1} - (q_{ij_n} - q_{ij_2}) x_{j_2} - \cdots - (q_{ij_n} - q_{ij_{n-1}}) x_{j_{n-1}} \end{cases}$$

Q5- En déduire une formulation de UFL avec pour seules variables, les variables x en 0-1 et les t_i i=1, …m, et avec un nombre de contraintes (linéaires) égal à $1+m \times n$.

Correction

Q1- $SP_i(x)$ est un problème de minimisation donc il faut mettre les contraintes d'inégalités dans le bon sens $-y_{ij} \geq -x_j$ j=1 à n. Construire ensuite le dual de $SP_i(x)$ avec λ_i variable duale (sans signe) associée à la contrainte d'égalité et $\pi_{ij} \geq 0$ (j=1 à n) associées aux contraintes d'inégalités.

Q2- La solution proposée satisfait bien les contraintes de $DSP_i(x)$ et elle est optimale car la valeur du dual, $\lambda_i = \min\{q_{ij} : j\ t.q.\ x_j = 1\}$, est égale à la valeur du primal.

Remarquons que, une fois que λ_i *et* π_{ij} pour j t.q. x_j=1 sont fixés, le choix est relativement libre pour les π_{ij} pour j t.q. x_j=0. Par exemple, on aurait pu prendre $+\infty$ (une valeur très grande) pour chacun d'eux. Mais ce type de solution a peu de chance d'être pareto-optimale. C'est pourquoi on a pris π_{ij} le plus petit possible : $\pi_{ij} = \max\{0, \lambda_i - q_{ij}\}$ pour les j tels que x_j=0.

Q3- Tout d'abord, nous explicitons comment nous obtenons la caractérisation des solutions *x* qui rendent $SP_i(x)$ réalisable. La contrainte d'égalité est éclatée en 2 inégalités.

$SP_i(x)$ admet une solution *y* si et seulement si

$$\min_{s,y} s$$

$$\text{Sous les contraintes} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} + s \geq 1 \\ -\sum_{j=1}^{n} y_{ij} + s \geq -1 \\ -y_{ij} + s \geq -x_j \qquad j = 1, \ldots, n \\ y_{ij} \geq 0\,, s \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

n'est pas positif.

On prend le dual de ce problème et on obtient :

$SP_i(x)$ admet une solution *y* si et seulement si

$$\max_{\lambda,\pi} \lambda_i^+ - \lambda_i^- - \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} x_j$$

$$\text{Sous contraintes} \begin{cases} \lambda_i^+ + \lambda_i^- + \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} \leq 1 \\ \lambda_i^+ - \lambda_i^- - \pi_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \ldots, n \\ \lambda_i^+ \geq 0, \lambda_i^- \geq 0, \pi_{ij} \geq 0\ j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

n'est pas positif.

Maintenant toute solution optimale de ce problème dual est telle qu'au moins l'une des 2 variables λ_i^+, λ_i^- est nulle. Si ce n'est pas le cas, poser $a = \min\{\lambda_i^+, \lambda_i^-\} > 0$ et $\lambda_i'^+ = \lambda_i^+ - a \geq 0, \lambda_i'^- = \lambda_i^- - a \geq 0$. Cette fois l'une des 2 variables est nulle et si l'on reporte ces λ' dans le problème, la valeur de l'objectif est inchangée et les contraintes satisfaites. On peut donc poser légitimement $\lambda_i = \lambda_i^+ - \lambda_i^-$ *et* $|\lambda_i| = \lambda_i^+ + \lambda_i^-$. Et on aboutit au programme $DSP_i°(x)$ donné dans l'énoncé.

Répondons à la question 3.

S'il y a au moins un x_j=1 alors dans l'objectif de $DSP_i°(x)$ il n'y a que des termes négatifs ou nuls à cause des contraintes. Donc, autant prendre $\lambda_i=\pi_{ij}=0\ \forall j$ et l'objectif atteint la valeur 0.

Si tous les x_j=0, alors on a intérêt à prendre λ_i le plus grand possible. Pour cela, les π_{ij} se mettent le plus bas possible et $\lambda_i=\pi_{ij}$ pour tout j=1 à n. On reporte dans la contrainte de « normalisation » qui est saturée et l'on obtient $(n+1)\ \lambda_i=1$.

La coupe de Benders $\lambda_i - \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} x_j \leq 0$ devient alors $\frac{1}{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+1} x_j \leq 0$.

Q4- Soit *x* un vecteur (0-1). On parcourt ses coordonnées dans l'ordre des q_{ij} croissant : $q_{ij_1} \leq q_{ij_2} \leq \cdots \leq q_{ij_n}$.

Soit j_k la première coordonnée rencontrée égale à 1 : $x_{j_\alpha} = 0\ \forall \alpha < k$ et $x_{j_k} = 1$. Alors, selon les résultats de la question 2 :

$$\lambda_i = \min\{q_{ij} : j\ t.q.\ x_j = 1\} = q_{ij_k}$$

car les q_{ij} sont croissants (ceux après j_k sont supérieurs ou égaux à q_{ij_k}).

Ensuite, pour $\alpha<k$:

$$\pi_{ij_\alpha} = (\lambda_i - q_{ij_\alpha})^+ = q_{ij_k} - q_{ij_\alpha}$$

et pour $\alpha \geq k$, il y a 2 cas possibles qui mènent au même coefficient :

- si $x_{j_\alpha} = 0 : \pi_{ij_\alpha} = (\lambda_i - q_{ij_\alpha})^+ = (q_{ij_k} - q_{ij_\alpha})^+ = 0$
- si $x_{j_\alpha} = 1 : \ \pi_{ij_\alpha} = 0$

Ce qui donne finalement la coupe de Benders :

$$t_i \geq q_{ij_k} - \sum_{\alpha=1}^{k-1} (q_{ij_k} - q_{ij_\alpha}) x_{j_\alpha}$$

Comme il faut envisager tous les vecteurs *x* 0-1 possibles, il faut mettre ces coupes pour k=1 à n.

Q5- Il faut mettre dans le modèle la coupe de la question 3 plus les coupes de la question 4 et ceci pour tout client *i*. Selon le client, les variables x_j ne sont pas parcourues dans le même ordre puisque cet ordre dépend du classement des q_{ij} (croissant sur j).
Toutes les coupes de Benders sont représentées dans ces $1+m\times n$ contraintes.
Donc (P^{UFL}_{0-1}) peut s'écrire:

$$\min_{x,t} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} t_i$$

sous les contraintes $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j \geq 1 \\ t_i \geq q_{ij_{i_k}} - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \left(q_{ij_{i_k}} - q_{ij_{i_\alpha}} \right) x_{j_{i_\alpha}} \quad i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n \\ x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, n \ ; \ \ t_i \in \mathrm{R} \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$

où $j_{i_1}, j_{i_2}, \dots, j_{i_n}$ sont les numéros des entrepôts rangés dans l'ordre pour le client *i* c'est-à-dire tels que $q_{ij_{i_1}} \leq q_{ij_{i_2}} \leq \cdots \leq q_{ij_{i_n}}$.