OPTI1- Dualité en PL - Algorithme dual du simplexe

Exercice 1. Dualité.

Un pays désire accroître son potentiel d'armement ; il veut acquérir au moins :

- 100 000 fusils
- 200 000 grenades
- 100 chars
- 400 mitrailleuses
- 400 bazookas

Il s'adresse pour ce faire à des marchands qui lui proposent 3 lots décrits ci-dessous :

	Lot 1	Lot 2	Lot 3
fusils	500	300	800
grenades	1000	2000	1500
chars	10	20	15
mitrailleuses	100	80	150
bazookas	80	120	200
Coûts des lots	10 M$	12 M$	15 M$

Les lots sont fractionnables : on peut acheter une fraction de lot.

1-Le pays en question va essayer de minimiser le coût de l'armement supplémentaire qu'il va acheter. Modéliser son problème par un programme linéaire P1.

2-Un fabricant qui produit ces différents types d''armes à la demande veut s'emparer du marché. Pour emporter le marché, le fabricant d'armement doit calculer ses prix de vente unitaires de façon à concurrencer les marchands d'armes tout en maximisant son profit.

Modéliser son problème par un programme linéaire P2. Quelle est la nature de P2 relativement à P1 ?

Exercice 2. Ecarts complémentaires

On considère le programme linéaire (P) suivant :

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$

Sous les contraintes
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 5 & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 & (2) \\ x_1 + 2x_2 \geq 3 & (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

La solution optimale est $x_1=3/2$, $x_2= ¾$ et l'objectif $z=21/4$

1° Ecrire (D) le dual de (P).

2° A l'aide des écarts complémentaires, trouver la solution optimale de (D).

Exercice 3. Ecarts complémentaires.

Soit le programme linéaire PL défini par :

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$

Sous contraintes $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0 \, , x_2 \geq 0 \end{cases}$

1-La solution définie par $\widetilde{x_1} = 3 \, , \widetilde{x_2} = 1$ est-elle réalisable ? optimale ?

2-La solution définie par $\widetilde{x_1} = \frac{26}{9} \, , \widetilde{x_2} = \frac{7}{9}$ est-elle réalisable ? optimale ?

Répondre à ces questions en utilisant le théorème des écarts complémentaires.

Exercice 4. Algorithme dual du simplexe.

Soit le programme linéaire PL défini par :

$$\min z = 2x_1 + x_3$$

Sous contraintes $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ x_1 \geq 0 \, , x_2 \geq 0 \, , x_3 \geq 0 \end{cases}$

1-Mettre le problème sous forme standard en rajoutant 2 variables d'écarts.

2-Résoudre PL en appliquant l'algorithme dual du simplexe en partant de la base constituée par les 2 variables d'écart.

3-Vérifier les calculs en faisant une résolution graphique du dual de PL.

Exercice 5. Algorithme dual du simplexe.

Soit le PL suivant :

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$

s.c. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ 7x_1 + 10x_2 \geq 47 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$

Résoudre à l'aide de l'algorithme dual du simplexe.

Correction.

Exercice 2.

1° (D) est $\max w = 5y_1 + 6y_2 + 3y_3$ sous les contraintes $\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 2 & (a) \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 3 & (b) \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$

2° Le théorème des écarts complémentaires peut se résumer ainsi :

- à une contrainte non saturée correspond une variable duale nulle
- à une variable duale non nulle correspond une contrainte saturée

On reporte la solution de (P) dans les contraintes de (P). La contrainte (1) n'est pas saturée. Donc $y_1=0$.

Maintenant x_1 et x_2 sont non nuls. Comme ce sont les variables duales de (D) associées aux contraintes (a) et (b), (a) et (b) sont saturées. Ce qui nous donne le système :

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 = 2 & (a) \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 3 & (b) \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne y_2= ¼ , y_3= 5/4

Vérifions que l'objectif z de (P) et l'objectif w de (D) coïncident. On reporte la solution trouvée dans w et on trouve : w=21/4 .

Exercice 5.

On rajoute 3 variables d'écart x_3, x_4, $x_5 \geq 0$ (une pour chaque contrainte) pour mettre le PL sous forme standard (contraintes d'égalités). On part ensuite de la base évidente (variables d'écart en base) qui est duale réalisable (coûts réduits≥0) mais pas primale réalisable car la solution de base correspondante est $x_1=x_2=0$ et $x_3=-8$, $x_4=-8$,$x_5=-47$ qui a des composantes <0. On a donc le tableau suivant :

base	X1	X2	X3	X4	X5	
X3	-4	-1	1	0	0	=-8
X4	-1	-4	0	1	0	=-8
X5	**-7**	-10	0	0	1	=-47
	2	3	0	0	0	=0 + z

On fait sortir de la base x_5 qui est la coordonnée la plus négative (ligne jaune). Qui va rentrer ?

Max{2/-7 , 3/-10} = - Min{2/7 , 3/10}=- 2/7 . La variable qui rentre est celle qui a réalisé ce min c'est-à-dire x_1 (colonne jaune). Le pivot -7 est indiqué en gras sur le tableau. On pivote et on obtient le tableau ci-dessous :

base	X1	X2	X3	X4	X5	
X3	0	33/7	1	0	-4/7	=132/7
X4	0	**-18/7**	0	1	-1/7	=-9/7
X1	1	10/7	0	0	-1/7	=47/7
	0	1/7	0	0	2/7	=-2×47/7 + z

On vérifie que la solution de base correspondante est toujours duale réalisable (coûts réduits≥0).

La variable sortante est $x_4<0$. La variable entrante est celle qui réalise max{(1/7)/(-18/7) , (2/7)/(-1/7)}=-1/18 variable x_2. Le pivot est -18/7 en gras. On pivote :

- On divise la ligne du pivot L_{x4} (ligne jaune) par le pivot -18/7. On obtient la nouvelle ligne L'_{x4}
- La nouvelle ligne de x3 est $L'_{x3} = L_{x3} - 33/7 \times L'_{x4}$
- La nouvelle ligne de x1 est $L'_{x1} = L_{x1} - 10/7 \times L'_{x4}$
- La nouvelle ligne de z est $L'_{z} = L_{z} - 1/7 \times L'_{x4}$

On obtient le nouveau tableau :

base	X1	X2	X3	X4	X5	
X3	0	0	1	33/18	-35/(6×7)	=33/2
X2	0	1	0	-7/18	1/18	=1/2
X1	1	0	0	10/18	-2/9	=6
	0	0	0	1/18	5/18	=-27/2 + z

On arrive à la solution de base $x_1=6$, $x_2=1/2$, $x_3=33/2$ $x_4=x_5=0$ primal réalisable donc optimale.

On vérifie z=2×6 + 3×1/2 = 13,5 = 27/2 .

La contrainte n°1 : 4×6 + ½ - 8 = 16 + ½ = 33/2 = x_3.

La contrainte n°2 : 6 + 4×½ - 8 = 0 = x_4.

La contrainte n°3 : 7×6 + 10×½ - 47 = 0 = x_5.