TD PLNE – OPTI1

Exercice 1. PLNE en minimisation - Procédure arborescente et coupes de Gomory

Soit le problème (P) :

$$\min z = -8x_1 - 5x_2$$

$$\text{Sous contraintes} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entiers} \end{cases}$$

1° Résoudre (P) par la méthode arborescente de Dakin

Correction

On passe en forme standard (contraintes d'égalité) en rajoutant variables d'écart x_3, $x_4 \geq 0$ puis on résout la relaxation continue par l'algorithme primal du simplexe. On trouve le tableau simplexe suivant :

base	X1	X2	X3	X4	
X1	1	0	-5/4	1/4	= 15/4
X2	0	1	9/4	-1/4	= 9/4
	0	0	5/4	3/4	= 41+1/4 + z

On sépare sur $x_1=3+3/4$ fractionnaire. 2 cas : $x_1 \leq 3$ ou $x_1 \geq 4$.

1° Cas $x_1 \leq 3$.

On rajoute la variable d'écart $s_1 \geq 0$ ce qui donne $x_1+s_1=3$.

On va faire un redémarrage à « chaud » c'est-à-dire à partir du tableau courant.

La variable s_1 vaut -3/4 c'est-à-dire non nulle donc forcément en base. On va éliminer x_1, elle-aussi en base, de l'équation. Cette opération est simple à faire car la ligne du tableau L_{x1} nous donne x_1 en fonction des variables hors-base. On obtient $s_1+5/4x_3—1/4x_4=-3/4$.

On reporte l'équation dans le tableau.

base	X1	X2	X3	X4	S1	
X1	1	0	-5/4	1/4	0	= 15/4
X2	0	1	9/4	-1/4	0	= 9/4
S1	0	0	5/4	-1/4	1	=-3/4
	0	0	5/4	3/4	0	= 41+1/4 + z

On ne peut pas appliquer l'algorithme primal du simplexe car la solution de base courante n'est pas primale réalisable i.e. elle a une coordonnée<0. Par contre, elle est duale réalisable i.e. la ligne des coûts réduits est ≥0. On fait tourner l'algorithme dual du simplex et on obtient le tableau suivant après une itération :

base	X1	X2	X3	X4	S1	
X1	1	0	0	0	1	= 3
X2	0	1	1	0	-1	= 3
X4	0	0	-5	1	-4	= 3
	0	0	5	0	3	= 39 + z

La solution obtenue est entière $x_1=3$, $x_2=3$, $x_4=3$ $x_3=s_1=0$ et z=-39. Pour l'instant z=-39 est le meilleur score obtenu par une solution entière. Notons UB=-39.

2° Cas $x_1 \geq 4$.

On rajoute la variable d'écart $s_1 \geq 0$ ce qui donne $x_1-s_1=4$.

On va faire un redémarrage à « chaud » c'est-à-dire à partir du tableau courant.

La variable s_1 vaut -1/4 c'est-à-dire non nulle donc forcément en base. On va éliminer x_1, elle-aussi en base, de l'équation. Cette opération est simple à faire car la ligne du tableau L_{x1} nous donne x_1 en fonction des variables hors-base. On obtient s_1—5/4x3+1/4x_4=-1/4.

On reporte l'équation dans le tableau.

base	X1	X2	X3	X4	S1	
X1	1	0	-5/4	1/4	0	= 15/4
X2	0	1	9/4	-1/4	0	= 9/4
S1	0	0	-5/4	1/4	1	=-1/4
	0	0	5/4	3/4	0	= 41+1/4 + z

De même, on ne peut pas appliquer l'algorithme primal du simplexe car la solution de base courante n'est pas primale réalisable i.e. elle a une coordonnée<0. Par contre, elle est duale réalisable i.e. la ligne des coûts réduits est ≥0. On fait tourner l'algorithme dual du simplex et on obtient le tableau suivant après une itération :

base	X1	X2	X3	X4	S1	
X1	1	0	0	0	-1	= 4
X2	0	1	0	1/5	9/5	= 9/5
X3	0	0	1	-1/5	-4/5	= 1/5
	0	0	0	1	1	= 41 + z

La solution obtenue n'est pas entière $x_1=4$, $x_2=9/5$, $x_3=1/5$ $x_4=s_1=0$ et $z=-41$. $-41<UB$ donc possibilité d'améliorer le meilleur score.

On sépare sur $x_2=1+4/5$ fractionnaire. 2 cas : $x_2\leq 1$ ou $x_2\geq 2$.

2.1° Cas $x_2\leq 1$

On rajoute la variable d'écart $s_2\geq 0$ ce qui donne $x_2+s_2=1$.

On fait de même que précédemment et on obtient la solution fractionnaire $x_1=40/9$, $x_2=1$, $x_3=29/45$, $s_1=4/9$, $x_4=s_2=0$ et $z=-41+4/9$. Là encore $-41+4/9<UB$. Donc il est peut-être possible d'améliorer le score.

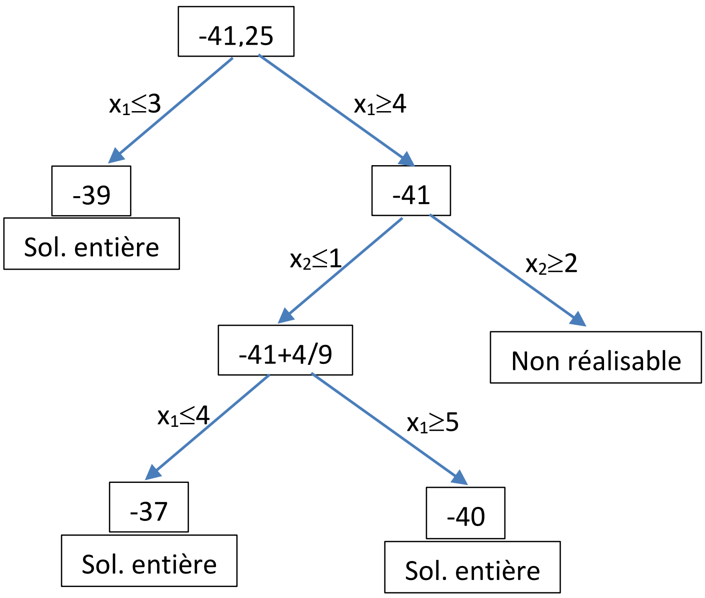
2.2° Cas $x_2\geq 2$

On rajoute la variable d'écart $s_2\geq 0$ ce qui donne $x_2-s_2=2$. On élimine x_2 et on obtient l'équation $s_2+1/5x_4+9/5s_1=-1/5$. Cette équation est sans solution si l'on tient compte du signe des variables qui sont positives ou nulles car à gauche de l'équation on a un nombre ≥ 0 et à droite un nombre <0.

Il reste à séparer dans le cas 2.1° sur la variable $x_1=4+4/9$ fractionnaire. On procède de même (démarrage à chaud) et on obtient les solutions entières suivantes :

- pour $x_1\leq 4$, $x_1=4$, $x_2=1$ et $z=-37$. Ici $-37>UB$ et cette solution entière est moins bonne que la précédente ($UB=-39$)
- pour $x_1\geq 5$, $x_1=5$ et $x_2=0$ et $z=-40$. Ici $-40<UB$ et cette solution entière est meilleure que la précédente ($UB=-39$). Donc c'est finalement la solution optimale du problème car il ne reste plus d'autres cas à tester.

Le schéma ci-dessous résume



La meilleure solution entière est bien celle qui donne $z=-40$.

2° Résoudre (P) par la méthode des coupes de Gomory

Correction

On passe en forme standard (contraintes d'égalité) en rajoutant variables d'écart x_3, $x_4 \geq 0$ puis on résout la relaxation continue par l'algorithme primal du simplexe. On trouve le tableau simplexe suivant :

base	X1	X2	X3	X4	
X1	1	0	-5/4	1/4	= 15/4
X2	0	1	9/4	-1/4	= 9/4
	0	0	5/4	3/4	= 41+1/4 + z

x_1 et x_2 sont fractionnaires. On peut faire une coupe de Gomory sur l'une ou l'autre. $x_1=3+ ¾$ et $x_2=1 + ¼$. La partie fractionnaire de x_1 (qui est ¾), est plus importante que la partie fractionnaire de x_2 (qui vaut ¼). Faisons une coupe de Gomory sur x_1. On considère la ligne L_{x1}.

Calculons les parties fractionnaires des coefficients de cette ligne :

- la partie fractionnaire de -5/4 est ¾ ,
- la partie fractionnaire de ¼ est ¼
- et la partie fractionnaire de 15/4 est ¾

Ce qui donne la coupe de Gomory : $¾ x_3 + ¼ x_4 \geq ¾$

On rajoute la variable d'écart $s \geq 0$ à cette coupe : $¾ x_3 + ¼ x_4 - s = ¾$. On va faire un redémarrage à « chaud ». La variable s est non nulle (pour la solution de base courante) donc on met s en base.

On reporte l'équation dans le tableau. On obtient le tableau suivant :

base	X1	X2	X3	X4	S	
X1	1	0	-5/4	1/4	0	= 15/4
X2	0	1	9/4	-1/4	0	= 9/4
S	0	0	-3/4	-1/4	1	=-3/4
	0	0	5/4	3/4	0	= 41+1/4 + z

La solution de base courante est duale réalisable (ligne des coûts réduits≥0). On applique l'algorithme dual du simplexe. On obtient le tableau suivant après une itération :

base	X1	X2	X3	X4	S	
X1	1	0	0	2/5	-5/3	= 5
X2	0	1	0	-1	3	= 0
X3	0	0	1	1/3	-4/3	= 1
	0	0	0	1/3	5/3	= 40 + z

On obtient une solution entière donc on stoppe. La solution est $x_1=5$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=s=0$ et $z=-40$.

Exercice 2. Méthode arborescente pour le sac-à-dos en 0-1

Soit (P) le problème de sac-à-dos :

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

Sous contraintes : $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ x_i \in \{0,1\}\ i = 1, \dots, n \end{cases}$

Où $c_i,\ a_i,\ b$ sont des entiers naturels positifs : a_i est le poids de l'objet i, c_i sa valeur marchande, b la capacité du sac.

Soit (PR) la relaxation continue de (P) où les variables sont dans l'intervalle [0,1] : $x_i \in [0,1]\ i = 1, \dots, n$.

(PR) se résout de la façon suivante :

-on trie les ratios $\frac{c_i}{a_i}$ *i*=1,….,*n* dans l'ordre décroissant. Ensuite, selon cet ordre, on met les objets dans le sac jusqu'à ce que l'on dépasse la capacité b. Le premier objet qui dépasse est mis fractionnaire.

- Supposons les objets indexés par ordre des ratios $\frac{c_i}{a_i}$ *i*=1,….,*n* décroissant. Soit i^* tel que $\sum_{i=1}^{i^*-1} a_i \leq b$ et $\sum_{i=1}^{i^*} a_i > b$, on pose :

$$\begin{cases} x_i = 1 \quad i = 1, \dots, i^* - 1 \\ x_{i^*} = \dfrac{b - \sum_{i=1}^{i^*-1} a_i}{a_{i^*}} \\ x_i = 0 \quad i \geq i^* + 1 \end{cases}$$

1-Ecrire les conditions de KKT de la relaxation continue et les résoudre.

2-En déduire la validité de l'algorithme de résolution décrit ci-dessus.

3-On considère maintenant l'instance de (P) suivante :

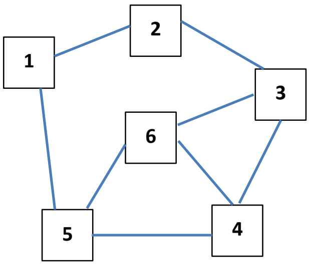
i	1	2	3	4	5
c_i	8	16	20	12	1
a_i	3	7	9	6	1

b=17

Résoudre (P) par une méthode arborescente où l'évaluation (majorant) d'un sous-problème d'un nœud de l'arborescence de recherche est obtenue par la résolution de la relaxation continue du sous-problème, et où le parcours de l'arborescence se fait en meilleur d'abord.

Exercice 3. Méthode arborescente pour le problème du stable de poids maximum

On considère le problème du stable dans un graphe. Soit un graphe, non orienté, G=(X,E) avec X les sommets, E les arêtes. Un stable S est un ensemble de sommets qui ne sont pas reliés 2 à 2 par une arête. Les sommets de G sont munis de poids. On veut trouver un ensemble stable S de poids maximum. On considère le problème sur le graphe suivant :



Les poids sont les suivants :

sommets	1	2	3	4	5	6
poids	2	2	4	2	2	4

1° Modéliser le problème par un PLNE avec les variables 0-1 x_i $i \in X$ telle que $x_i=1$ si le sommet i est mis dans S et $x_i=0$ sinon. On mettra une contrainte par arête du graphe soit 8 contraintes.

2° On va résoudre ce problème en 0-1 par une méthode arborescente. Rappelons que c'est un problème de maximisation. Les UB (bornes supérieures) seront donc données par la relaxation continue. La séparation sur les variables fractionnaires se fera en commençant par celle de plus petit indice : par exemple, si x_1 et x_2 sont fractionnaires à une étape donnée, on séparera sur x_1. Le parcours de l'arborescence de recherche se fera en meilleur d'abord.

2.1. La relaxation continue du PLNE donne $x_i=1/2$ pour i=1 à 6. En déduire une borne supérieure de la valeur du stable de poids max.

2.2.

- On fixe $x_1=0$, la relaxation continue donne $x_i=1/2$ pour i=2 à 6. En déduire une borne supérieure de la valeur du stable de poids max si le sommet 1 n'est pas dans le stable.

- On fixe $x_1=1$, la relaxation continue donne $x_2= x_5=0$, $x_3= x_4= x_6=1/2$. En déduire une borne supérieure de la valeur du stable de poids max si le sommet 1 est dans le stable.

- Tracer l'arborescence obtenue jusque là.

2.3

- On fixe $x_1=x_2=0$, la relaxation continue donne $x_3= x_5=1$ et $x_4= x_6=0$. En déduire une solution du problème du stable de poids max et la valeur de cette solution.

- On fixe $x_1=0$, $x_2=1$, la relaxation continue donne $x_3=x_4=x_5=0$ et $x_6=1$. En déduire une solution du problème du stable de poids max et la valeur de cette solution.

- Tracer l'arborescence obtenue jusque là. Peut-on stopper la recherche ?

2.4

- On fixe $x_1=1$, $x_3=0$, la relaxation continue donne $x_2=x_4=x_5=0$ et $x_6=1$. En déduire une solution du problème du stable de poids max et la valeur de cette solution.

- On fixe $x_1=1$, $x_3=1$, la relaxation continue donne $x_2=x_4=x_5=x_6=0$. En déduire une solution du problème du stable de poids max et la valeur de cette solution.

- Tracer l'arborescence obtenue jusque là. Peut-on stopper la recherche ?

- Combien a-t-on trouvé de solutions optimales au problème du stable de poids maximum ?

Exercice 4. Coupe de Chvatal

On considère le problème du stable dans un graphe. Soit un graphe, non orienté, G=(X,E) avec X les sommets, E les arêtes. Un stable S est un ensemble de sommets qui ne sont pas reliés 2 à 2 par une arête. Les sommets de G sont munis de poids. On veut trouver un ensemble stable S de poids maximum.

1- On considère un graphe qui est un cycle de n sommets avec n impair. Modéliser le problème par un PLNE avec les variables 0-1 x_i $i \in X$ telle que $x_i=1$ si le sommet i est mis dans S et $x_i=0$ sinon. On mettra une contrainte par arête du graphe.

2-Montrer avec une coupe de Chvatal que $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{n-1}{2}$ est une inégalité valide. Cette inégalité est appelée *inégalité de cycle impair*.

Exercice 5. Algorithme des coupes de Gomory

Soit le problème (P) :

$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$

$$\text{Sous contraintes} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entiers} \end{cases}$$

1-Ajouter les variables d'écarts x_3 , x_4.

2-On note (PR) la relaxation continue de (P) i.e. les conditions d'intégrité sont relâchées.

Montrer que $x_1 = \frac{15}{4}$, $x_2 = \frac{9}{4}$, $x_3 = x_4 = 0$ est la solution du problème (PR).

3-Générer une coupe de Gomory ayant le membre gauche le plus élevée i.e. associée à la variable dont la partie fractionnaire est la plus élevée.

Vérifier graphiquement que cette coupe est bien valide pour (P).

4-Ajouter cette coupe et résoudre le nouveau problème. A-t-on résolu (P) ?