PLNE Programmation Linéaire en nombres entiers

ENSIIE - Option Optimisation 1

Alain Faye

Contenu

Procédures arborescentes
Principes généraux

Procédures arborescentes

Problèmes en variables discrètes
Enumération implicite
Enumération totale évitée à l 'aide de bornes inférieures et bornes supérieures

Problème P : minimiser z
UB = valeur de z pour une solution de P
LB borne inférieure du minimum de z
si LB≥UB alors on ne peut avoir mieux que UB
et UB est la valeur de la solution optimale

Point clé

On énumère ce qui revient à diviser P en sous-problèmes de plus en plus petits
Quand un problème est petit on trouve facilement sa solution optimale UB
On garde le meilleur UB trouvé
Pour chacun des sous-problèmes on calcule LB et on applique le test LB≥UB

C 'est ce test qui permet d 'éviter l 'énumération totale en écartant les sous-problèmes pas intéressants

Exemple

min $z = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 3x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ avec $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{ 0 , 1\}$

On fait les choix suivant pour la procédure arborescente :

- on sépare sur une variable x_i que l'on fixe à 1 ou à 0.

On prend les variables dans l'ordre x_1, x_2, x_3, x_4 .

- pour LB de z on prend la valeur constituée par l'ensemble des variables fixées

+ la somme des coefficients <0 relatifs aux variables libres restantes.

Par exemple, pour x_1=1, x_2=0 et x_3, x_4 libres, $z = -1 - x_3 - x_4 - 3x_3 + x_4 + 2x_3x_4$,

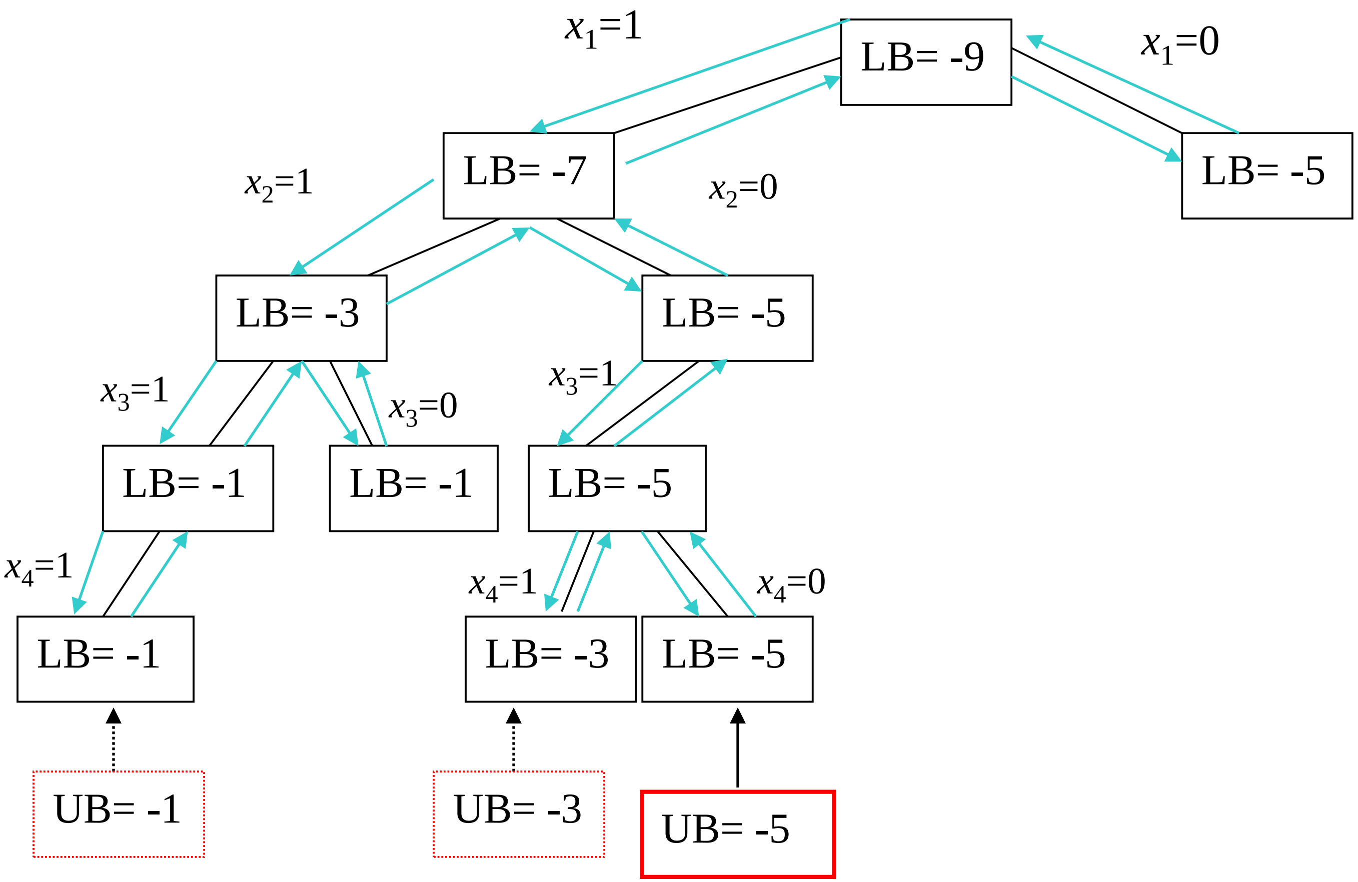
$z = -1 - x_3 - 3x_3 + 2x_3x_4 \geq -5$ et LB = –5,

pour x_1=1, x_2=1 et x_3, x_4 libres, $z = -1 - 1 - x_3 - x_4 + 3 - 3x_3 + x_4 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_3x_4$

$z = 1 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_3x_4 \geq -3$ et LB = –3.

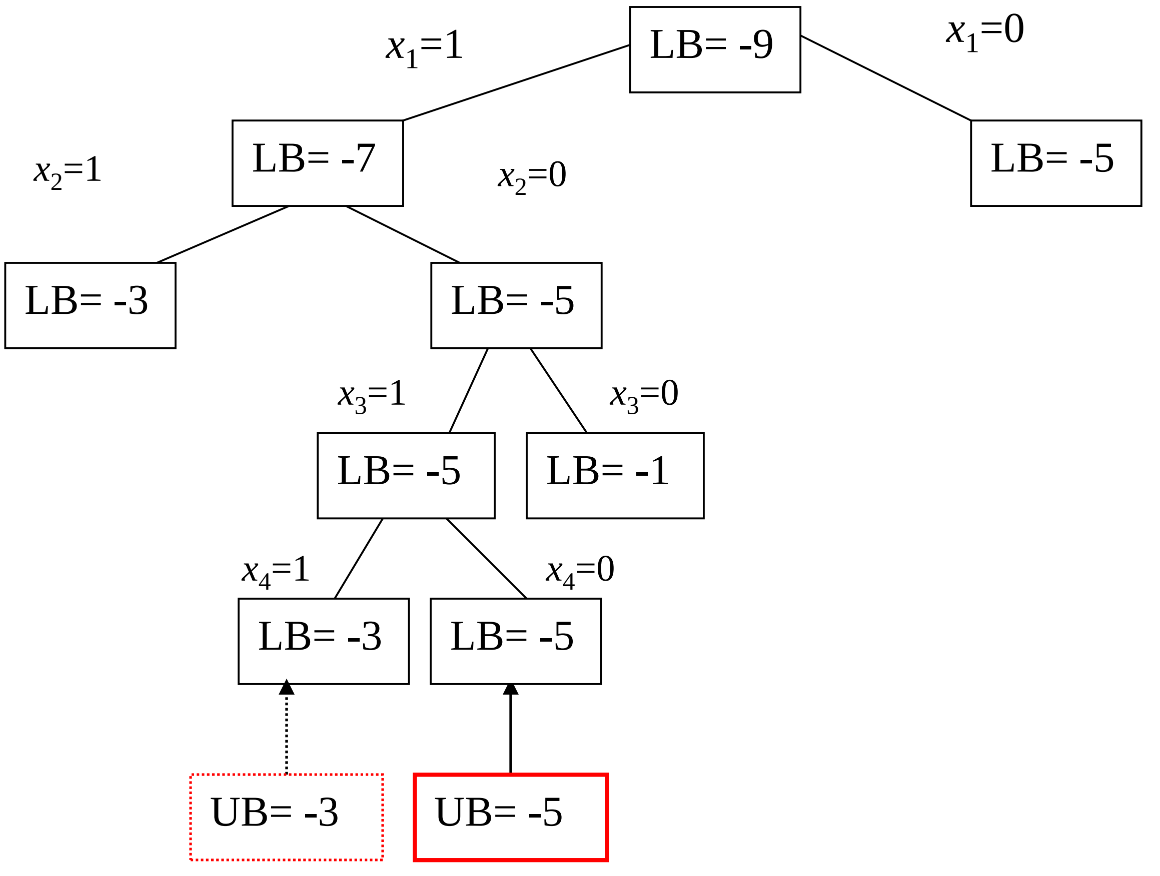
- Le UB est calculé à chaque fois que l'on est sur une feuille de l'arbre de recherche.

Recherche en profondeur d 'abord



On rencontre UB=-1, -3 et finalement -5 et on <u>prouve</u> qu 'il n 'y a pas mieux

Recherche en meilleur d ’abord



On rencontre UB=-3 et finalement -5 et on <u>prouve</u> qu ’il n ’y a pas mieux

Procédures arborescentes en minimisation - résumé

- **Les bornes**

LB facile à calculer, calculée en chaque nœud de l'arbre
UB obtenue aux feuilles de l'arbre ou calculée par un algo simple

- **Séparation**

On énumère, on divise le pb ou sous-pb de plus en plus petits

- **Elagage**

de l'arbre de recherche grâce aux bornes UB et LB
Si LB $\geq$ UB en un nœud de l'arbre on coupe ce nœud.

Programmation linéaire en nombres entiers

Programmation linéaire en nombres entiers

(P) min/max z=cx s.c. Ax≤b $x \in \mathrm{N}^n$

c un vecteur ligne de n coordonnées,
A une matrice m lignes, n colonnes,
b un vecteur colonne de m coordonnées,
x un vecteur colonne de n coordonnées représentant les variables du problème.

N désigne ici l'ensemble des entiers naturels $\{0,1,2,3\ldots\}$.

Les coefficients de c, A, b sont supposés entiers (pas forcément positifs).

Résolution:

- procédure arborescente
- algorithme des coupes de Gomory

Programmation linéaire en nombres entiers – Les applications

Beaucoup de problèmes se modélisent par la PLNE

Exemples:

- Localisation usines, entrepôts, magasins
- Localisation de matériels dans les réseaux de télécoms
- Ordonnancements de tâches , allocation de ressources
- Emploi du temps
- Contrôle aérien, séquencement des avions

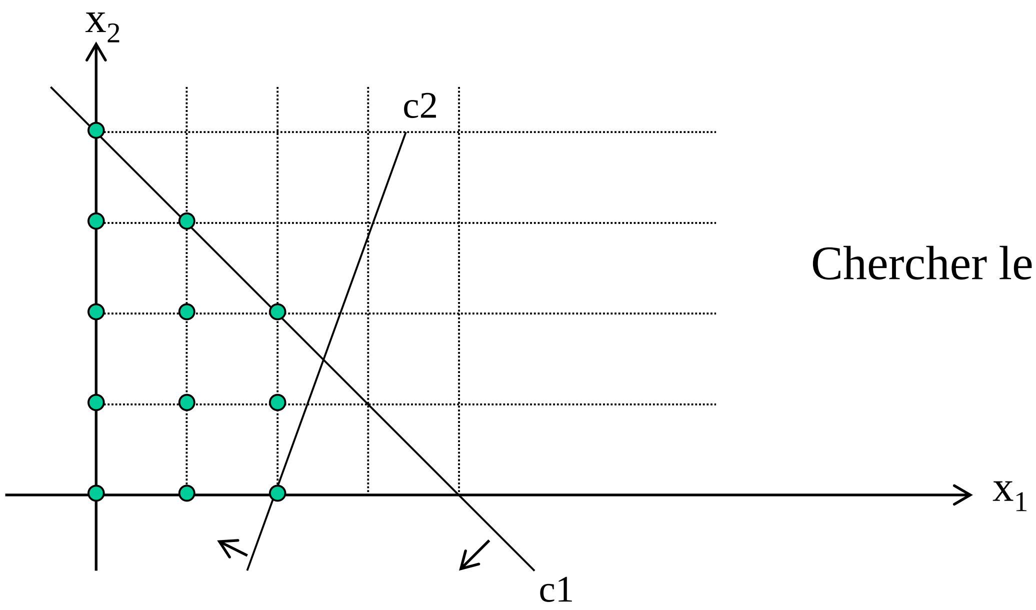
…

Programmation linéaire en nombres entiers
Résolution par procédure arborescente

PLNE - Exemple

$$\min z = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 & (c\,1) \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 & (c\,2) \\ x_1 \in \mathrm{N} \quad x_2 \in \mathrm{N} \end{cases}$$



Chercher le point vert qui minimise *z*

Procédure arborescente
Pb de type minimiser

<u>Évaluation LB</u>

LB = valeur de la relaxation continue du problème où $x \in$ N est relaxée en $x \geq 0$, on a un PL que l 'on résout par l 'algorithme du simplexe (par exemple)

<u>Séparation</u>

si une variable x_i est fractionnaire on crée 2 sous-problèmes
par exemple: $x_i = {}^7/_4$
on crée un sous-problème avec la contrainte $x_i \leq \lfloor {}^7/_4 \rfloor = 1$
l 'autre avec la contrainte $x_i \geq \lfloor {}^7/_4 \rfloor + 1 = 2$

<u>Majorant UB</u>

Lorsque la résolution d 'un sous-problème relaxé donne une solution entière , on obtient une solution.
Si elle est meilleure que la précédente on la mémorise (UB)

<u>Elagage de l'arbre de recherche</u>

Quand un sous-problème donne une évaluation LB≥UB on l 'élimine.

Problème de minimisation – Résumé des cas possibles

Relax continue → solution fractionnaire $\bar{x}_i$

$x_i \leq \lfloor \bar{x}_i \rfloor$

Relax continue → solution entière
si valeur z de la solution < UB
alors UB←valeur z de la solution

$x_i \geq \lfloor \bar{x}_i \rfloor + 1$

Relax continue → sol. fractionnaire $\bar{x}_j$
Valeur Relax continue = LB < UB

$x_j \leq \lfloor \bar{x}_j \rfloor$

Relax continue → Sol. fract.
Valeur de Relax cont = LB<UB

$x_k \leq \lfloor \bar{x}_k \rfloor$

$x_k \geq \lfloor \bar{x}_k \rfloor + 1$

$x_j \geq \lfloor \bar{x}_j \rfloor + 1$

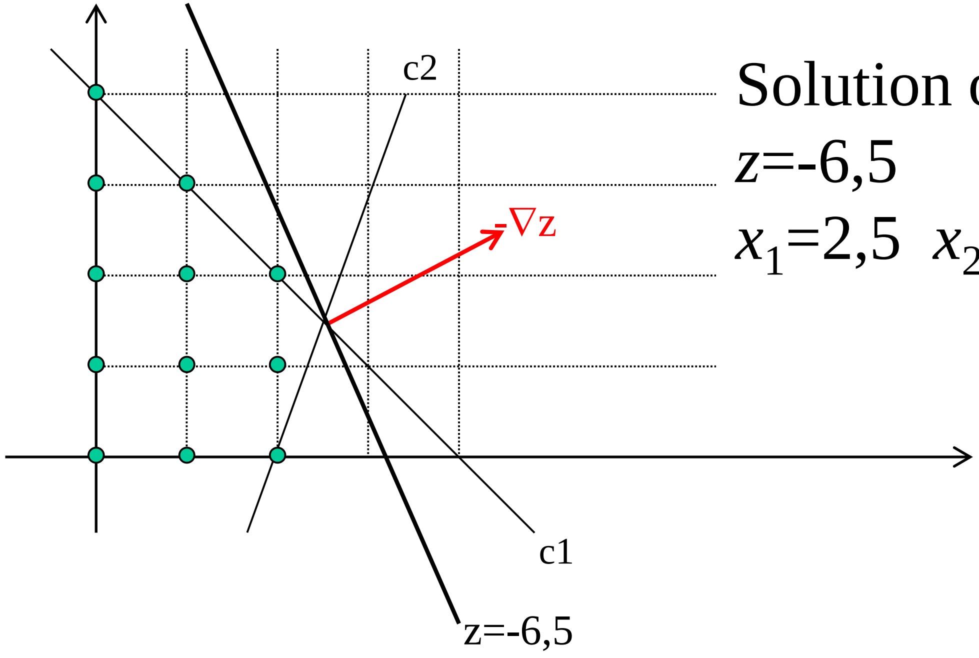
Solution fractionnaire
LB≥UB

PLNE - Exemple

Relaxation continue $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

$$\min z = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 & + x_2 & \leq 4 & \text{(c 1)} \\ 3x_1 & - x_2 & \leq 6 & \text{(c 2)} \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & & \end{cases}$$

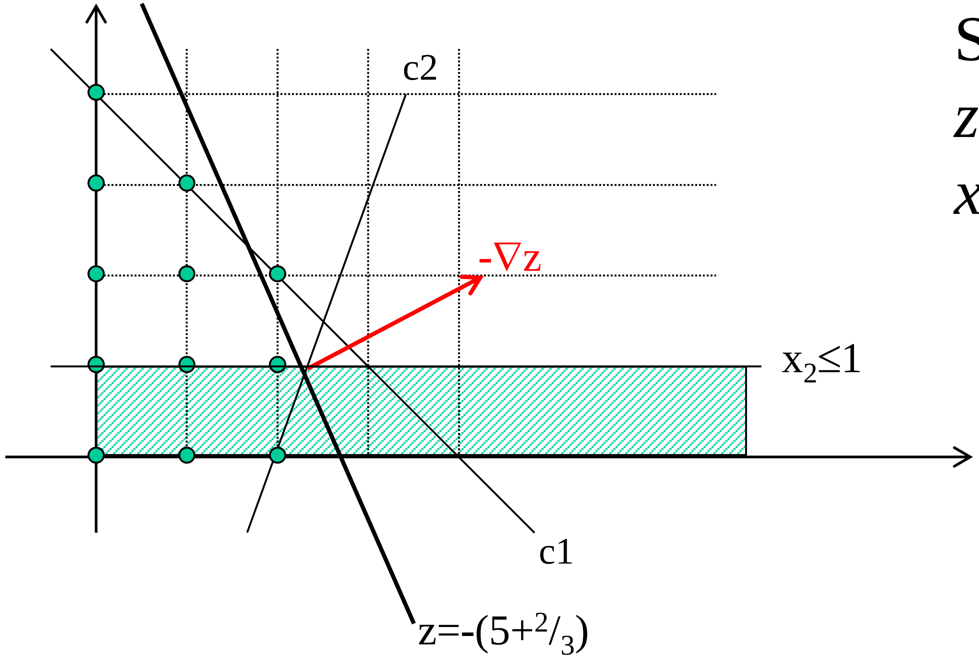


Solution optimale relax continue

z=-6,5

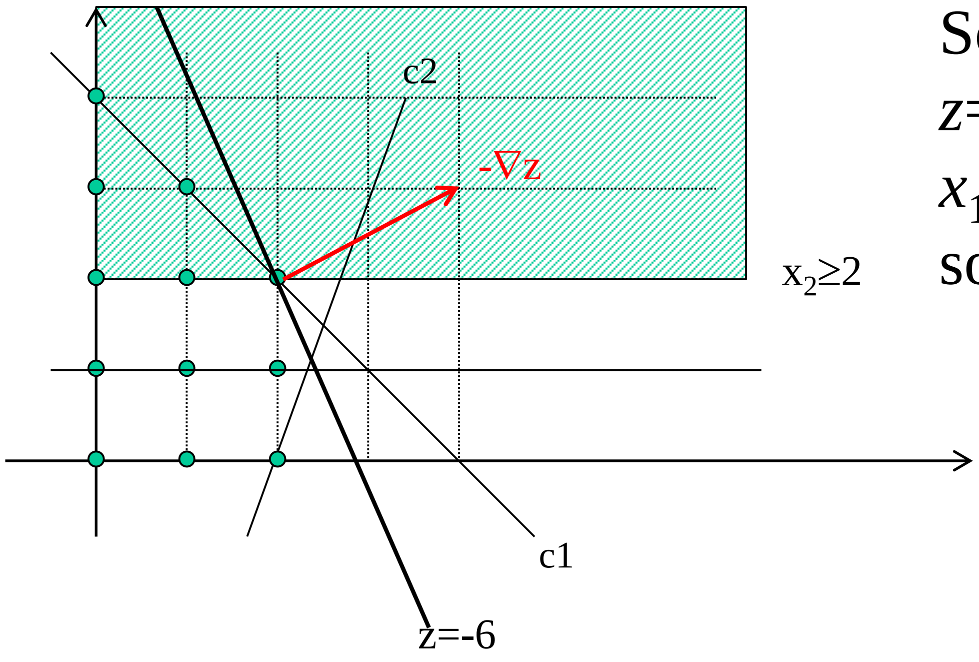
x_1=2,5 x_2=1,5

On choisit une variable fractionnaire par exemple x_2=1,5
On crée deux sous-problèmes
$x_2 \leq 1$ et $x_2 \geq 2$



Sous-problème $x_2 \leq 1$
$z=-(5+{}^2/_3)$
$x_1=2+{}^1/_3 \quad x_2=1$

On choisit une variable fractionnaire par exemple $x_2=1{,}5$
On crée deux sous-problèmes
$x_2 \leq 1$ et $x_2 \geq 2$



Sous-problème $x_2 \geq 2$
$z=-6$
$x_1=2 \quad x_2=2$
solution entière

PLNE – Exemple - bilan

$$\min z = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 \quad + x_2 \leq 4 & (c\,1) \\ 3x_1 \quad - x_2 \leq 6 & (c\,2) \\ x_1 \in \mathrm{N} \quad x_2 \in \mathrm{N} & \end{cases}$$

z=-6,5
x_1=2,5, x_2=1,5

$x_2 \leq 1$

z=-(5+$^2/_3$)
x_1=2+$^1/_3$, x_2=1

ce sous-problème ne peut donner moins que -(5+$^2/_3$) ; on l'abandonne car on a une solution de valeur z=-6

$x_2 \geq 2$

z=-6
x_1=2, x_2=2

on a une solution entière de valeur z=-6

Exercice

Soit le problème (P) suivant:

$$\min z = -8x_1 - 5x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \ et\ entiers \end{cases}$$

Résoudre (P) par la procédure arborescente

Programmation linéaire en nombres entiers
Coupes de Chvatal

Inégalités valides

(P) min/max z=cx s.c. Ax≤b $x \in N^n$

On note F(P) l'ensemble des solutions réalisables du pb P
$F(P_R)$ l'ensemble des solutions réalisables de la relax continue de P

Inégalité valide $\pi x \leq \pi_0$ si elle est vérifiée $\forall x \in F(P)$

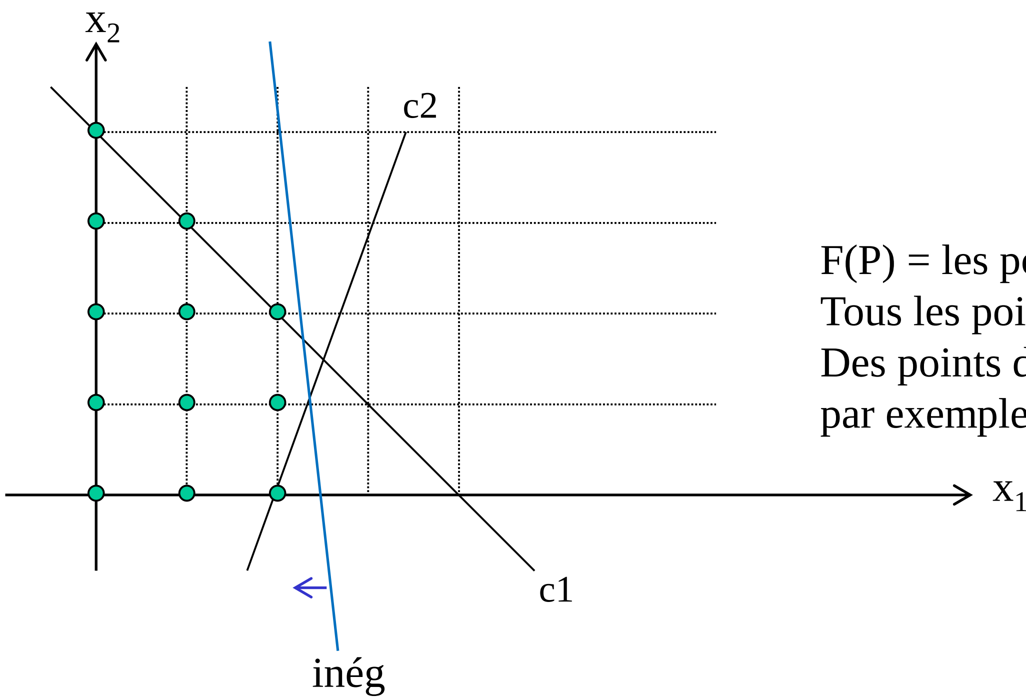
Inégalité valide intéressante si elle « tronque » $F(P_R)$

L'ajout d'inégalité valides améliore la relax continue
LB plus haute donc on tronque l'arbre de recherche plus facilement

Inégalités valides - exemple

$$\min z = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 & + x_2 & \leq 4 & (c\,1) \\ 3x_1 & - x_2 & \leq 6 & (c\,2) \\ x_1 \in \mathrm{N} & x_2 \in \mathrm{N} & & \end{cases}$$



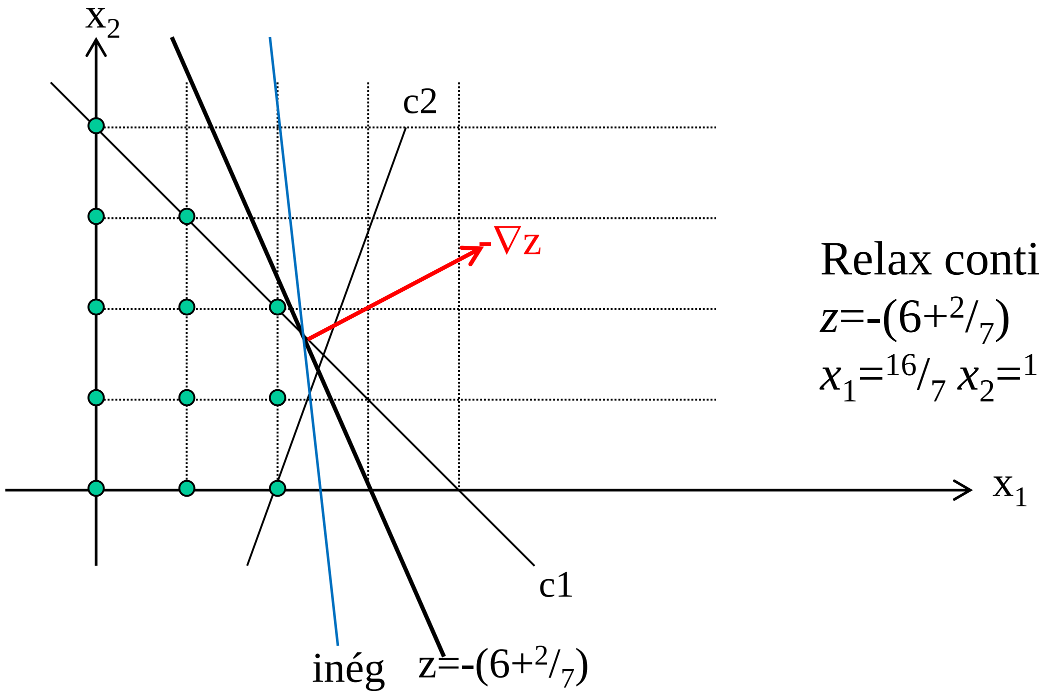
F(P) = les points verts
Tous les points verts vérifient inég
Des points de $F(P_R)$ ne satisfont pas inég
par exemple x_1=2,5 x_2=1,5

Inégalité valide $8x_1 + x_2 \leq 20$ (inég)

Inégalité valide améliore relax continue - exemple

$$\min z = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 & (c\,1) \\ 3x_1 - x_2 \le 6 & (c\,2) \\ 2x_1 + x_2 \le 6 & (\text{inèg}) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



Relax continue + inég

$z=-(6+{}^{2}/_{7})$

$x_1={}^{16}/_{7}\ x_2={}^{12}/_{7}$

Inégalité valide - coupe de Chvatal

Notation: $\lfloor \alpha \rfloor$=plus grand entier inférieur ou égal à α

exemples: $\lfloor 5,4 \rfloor=5$ $\lfloor -5,4 \rfloor=-6$ $\lfloor 5 \rfloor=5$

Coupes de Chvatal donnent inégalités valides pour F(P) à partir d'inégalités valides pour $F(P_R)$ de la façon suivante:

Soit $\sum_j a_j x_j \leq \beta$ une inégalité valide pour $F(P_R)$

- **relaxation membre gauche**

$\sum_j \lfloor a_j \rfloor x_j \leq \beta$ est valide car $x \geq 0$

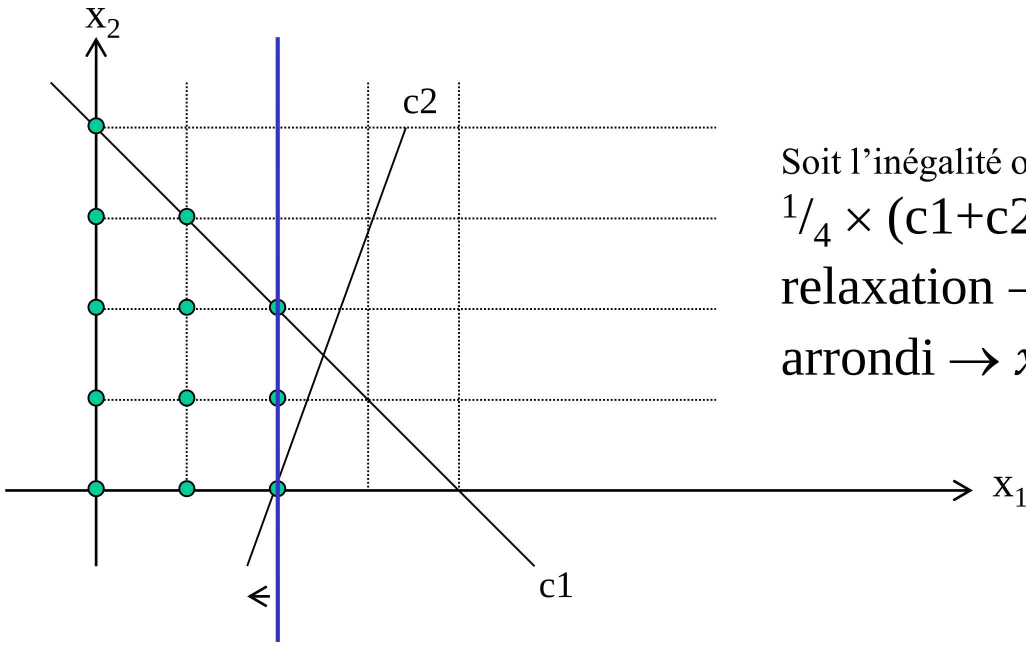
- **arrondi membre droit** (c'est ici que l'on coupe)

$\sum_j \lfloor a_j \rfloor x_j \leq \lfloor \beta \rfloor$ est valide pour F(P) car x entier

Inégalité valide - coupe de Chvatal - exemple

$$\min z = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.c.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 & (c\,1) \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 & (c\,2) \\ x_1 \in \mathrm{N} \quad x_2 \in \mathrm{N} \end{cases}$$



Coupe de Chvatal $x_1 \leq 2$

Soit l'inégalité obtenue par combinaison de c1 et c2

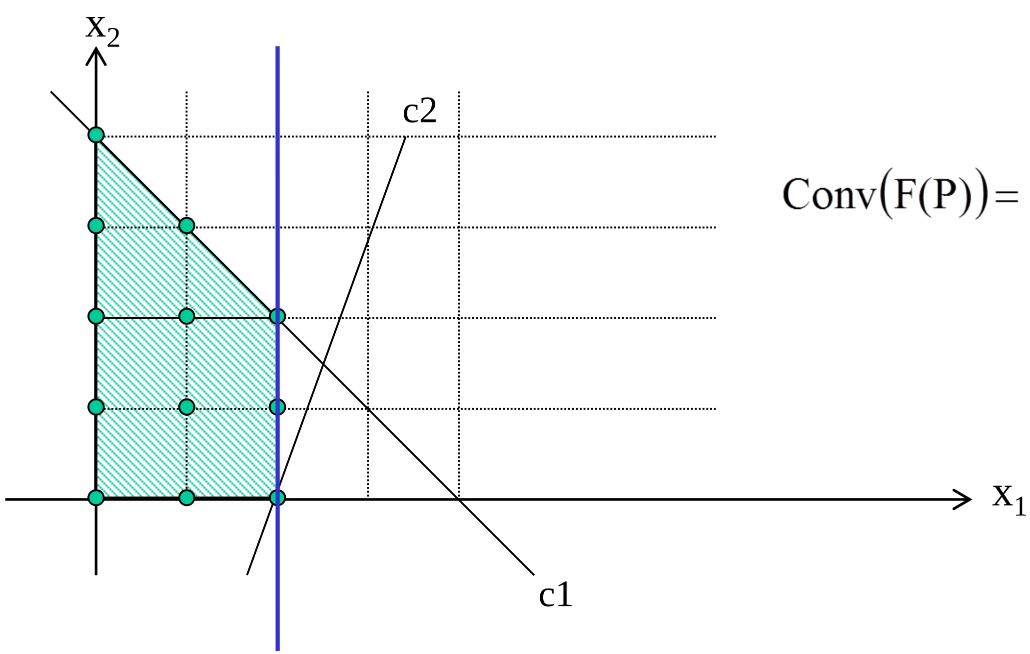
$^1/_4 \times$ (c1+c2) $\rightarrow \frac{4}{4}x_1 \leq \frac{10}{4}$

relaxation $\rightarrow x_1 \leq \frac{10}{4}$

arrondi $\rightarrow x_1 \leq 2$

Inégalité valide - coupe de Chvatal

En rajoutant des coupes de Chvatal,
on arrive à l'enveloppe convexe de F(P)
en un nombre fini d'itérations (ajout d'un nombre fini de coupes)



$$\mathrm{Conv}\big(\mathrm{F(P)}\big) = \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 & \text{(c 1)} \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 & \text{(c 2)} \\ x_1 \leq 2 & \text{(Chvatal)} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Coupe de Chvatal $x_1 \leq 2$

Programmation linéaire en nombres entiers
Algorithme des coupes de Gomory

Algorithme des coupes de Gomory

1. On résout P_R la relaxation continue de P

Si la solution x_R* est entière alors P est résolu et on s'arrête

Sinon

- on ajoute une coupe de Chvatal
  qui élimine cette solution x_R* fractionnaire
- on retourne en 1

Algorithme des coupes de Gomory - exemple

$$\min z = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 & (c\,1) \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 & (c\,2) \\ x_1 \in \mathrm{N} \quad x_2 \in \mathrm{N} \end{cases}$$

Mise du pb sous forme standard (contraintes d'égalités)

$$\min z = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 \in \mathrm{N} \quad x_2 \in \mathrm{N} \quad x_3 \in \mathrm{N} \quad x_4 \in \mathrm{N} \end{cases}$$

Solution de la relaxation continue $x_1={}^5/_2$, $x_2={}^3/_2$, $x_3=x_4=0$

base	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$=\frac{5}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$=\frac{3}{2}$
			$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$=\frac{13}{2}+z$

fractionnaire

$x_1+{}^1\!/_4\, x_3 + {}^1\!/_4\, x_4 = {}^5\!/_2$

Solution de la relaxation continue $x_1={}^5/_2$, $x_2={}^3/_2$, $x_3=x_4=0$

base	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$=\frac{5}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$=\frac{3}{2}$
			$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$=\frac{13}{2}+z$

fractionnaire

$$x_1+{}^1\!/_4\,x_3 + {}^1\!/_4\,x_4 = {}^5\!/_2$$

$$x_1+(0+{}^1\!/_4)x_3 +(0+{}^1\!/_4)\,x_4 = 2+{}^1\!/_2$$

$$x_1+(0)x_3 +(0)\,x_4 \leq 2+{}^1\!/_2$$

$$x_1+(0)x_3 +(0)\,x_4 \leq 2$$

(coupe de Chvatal)

Solution de la relaxation continue $x_1 = {}^5/_2$, $x_2 = {}^3/_2$, $x_3 = x_4 = 0$

base	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$= \frac{5}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$= \frac{3}{2}$
			$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$= \frac{13}{2} + z$

fractionnaire

$$x_1 + {}^1\!/_4\, x_3 + {}^1\!/_4\, x_4 = {}^5\!/_2$$

$$x_1 + (0 + {}^1\!/_4)\, x_3 + (0 + {}^1\!/_4)\, x_4 = 2 + {}^1\!/_2$$

$$x_1 + (0)x_3 + (0)\, x_4 \leq 2 + {}^1\!/_2$$

$$x_1 + (0)x_3 + (0)\, x_4 \leq 2$$

(coupe de Chvatal)

+

–

$${}^1\!/_4\, x_3 + {}^1\!/_4\, x_4 \geq {}^1\!/_2$$

La solution de base ne vérifie pas cette inégalité
Elle sera exclue par cette inégalité

Solution de la relaxation continue $x_1={}^5/_2$, $x_2={}^3/_2$, $x_3=x_4=0$

base	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$=\frac{5}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$=\frac{3}{2}$
			$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$=\frac{13}{2}+z$

fractionnaire

$$x_1+{}^1\!/_4\,x_3+{}^1\!/_4\,x_4={}^5\!/_2$$

$$x_1+(0+{}^1\!/_4\,)x_3+(0+{}^1\!/_4)\,x_4=2+{}^1\!/_2$$

$$x_1+(0)x_3+(0)\,x_4\leq 2+{}^1\!/_2$$

$$x_1+(0)x_3+(0)\,x_4\leq 2$$

(coupe de Chvatal)

$+$

$-$

$${}^1\!/_4\,x_3+{}^1\!/_4\,x_4\geq{}^1\!/_2$$

La solution de base ne vérifie pas cette inégalité
Elle sera exclue par cette inégalité

Formule générale de la coupe: $\boxed{\sum_{j\text{ t.q.}x_j\text{ hors-base}} \mathrm{f}_{ij}x_j\geq \mathrm{f}_i}$

avec f = partie fractionnaire = $\alpha-\lfloor\alpha\rfloor$

Algorithme des coupes de Gomory

base	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
			$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{2}+z$

Coupe à ajouter

$$\tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 \geq \tfrac{1}{2} \longrightarrow \tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 - s = \tfrac{1}{2} \longrightarrow -\tfrac{1}{4}x_3 - \tfrac{1}{4}x_4 + s = -\tfrac{1}{2}$$

base	x_1	x_2	x_3	x_4	s	
x_1	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$
s			$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$
			$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{13}{2}+z$

Solution de base non réalisable car $s<0$

Algorithme dual du simplexe

base	x_1	x_2	x_3	x_4	s	
x_1	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$
s			$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$
			$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{13}{2}+z$

$\longrightarrow$ s sort

Qui rentre?

$(\frac{5}{4} x_3 + \frac{1}{4} x_4 = \frac{13}{2} + z) - \rho\times(-\frac{1}{4} x_3 - \frac{1}{4} x_4 + s = -\frac{1}{2})$

$(\frac{5}{4} - \rho\times(-\frac{1}{4}))x_3 + (\frac{1}{4} - \rho\times(-\frac{1}{4}))x_4 - \rho\times s = \frac{13}{2} - \rho\times(-\frac{1}{2}) + z$

les coûts réduits sont ≥ 0 :

$\frac{5}{4} - \rho\times(-\frac{1}{4}) \geq 0$, $\frac{1}{4} - \rho\times(-\frac{1}{4}) \geq 0$, $\rho \leq 0$,

ce qui donne $(\frac{5}{4})/(-\frac{1}{4}) \leq \rho$, $(\frac{1}{4})/(-\frac{1}{4}) \leq \rho$, $\rho \leq 0$.

Pour qu'un coût réduit s'annule il faut prendre :

$\rho = \max\{(\frac{5}{4})/(-\frac{1}{4}), (\frac{1}{4})/(-\frac{1}{4})\} = (\frac{1}{4})/(-\frac{1}{4})$

ce qui correspond à la variable x_4. La variable x_4 rentre en base.

Algorithme dual du simplexe (suite)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	s	
x_1	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$
s			$-\frac{1}{4}$	$\boxed{-\frac{1}{4}}$	1	$-\frac{1}{2}$
			$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{13}{2}+z$

s sort

x_4 rentre en base

base	x_1	x_2	x_3	x_4	s	
x_1	1		0	0	1	2
x_2		1	1	0	-1	2
x_4			1	1	-4	2
			1	0	1	$6+z$

Solution ≥ 0 + Coûts réduits ≥ 0 et on minimise $\Rightarrow$ STOP

$z=-6$ et $x_1=x_2=2$

Branch-and-Cut

On combine procédure arborescente et ajout de coupes

Procédure arborescente
\+ ajout de coupes en chaque nœud de l'arborescence

Ajout de coupes permet d'améliorer LB en chaque nœud
Si on augmente LB on élague plus l'arbre de recherche

En pratique, on met un nombre limité de coupes en chaque nœud pour économiser le temps de calcul
Souvent on ne met des coupes qu' à la racine de l'arborescence

Logiciels PLNE

Résolution de problèmes de grandes tailles :
nombre élevé de variables et de contraintes

Langages de modélisation : AMPL, Mosel
écriture au format « mathématique » du problème

XPRESS-MP : Sociétés FICO - Artelys
CPLEX : société IBM
Versions « étudiantes » gratuites

Logiciels libres
COIN-OR
GLPK

Exercice

Soit le problème (P) suivant:

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \in N \ (entiers) \end{cases}$$

1- Mettre (P) sous forme d'un problème de minimisation (P′)

2- Mettre (P′) sous forme standard (contraintes d'égalités) et le résoudre par la méthode des coupes de Gomory

3- Résoudre (P′) par la procédure arborescente

Annexes

- Déroulement de l'algorithme des coupes de Gomory sur un problème de maximisation
- Un exemple de modélisation PLNE – localisation d'un magasin
- Remarques générales sur la PL et la PLNE

Coupe de Gomory

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.c.}\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 & \text{(contrainte 1)} \\ 3x_1 - x_2 \le 6 & \text{(contrainte 2)} \\ x_1 \in \mathrm{N} \quad x_2 \in \mathrm{N} \end{cases}$$

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.c.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 \in \mathrm{N} \quad x_2 \in \mathrm{N} \quad x_3 \in \mathrm{N} \quad x_4 \in \mathrm{N} \end{cases}$$

Relaxation continue

base	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
			$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{13}{2}+z$

fractionnaire

$$x_1 + \tfrac{1}{4} x_3 + \tfrac{1}{4} x_4 = \tfrac{5}{2}$$

$$x_1 + (0 + \tfrac{1}{4}) x_3 + (0 + \tfrac{1}{4}) x_4 = 2 + \tfrac{1}{2}$$

$$x_1 + (0) x_3 + (0) x_4 \leq 2 + \tfrac{1}{2}$$

$$x_1 + (0) x_3 + (0) x_4 \leq 2$$

$$x_1 + (0) x_3 + (0) x_4 + s = 2$$

$+$

$-$

$$\tfrac{1}{4} x_3 + \tfrac{1}{4} x_4 - s = \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{4} x_3 + \tfrac{1}{4} x_4 \geq \tfrac{1}{2}$$

La solution de base ne vérifie pas cette inégalité
Elle sera exclue par cette inégalité

Autre coupe

base	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
			$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{13}{2}+z$

fractionnaire

$$x_2 + {}^3\!/_4\, x_3 - {}^1\!/_4\, x_4 = {}^3\!/_2$$

$$x_2 + (0+{}^3\!/_4)\, x_3 + (-1+{}^3\!/_4) x_4 = 1+{}^1\!/_2$$

$$x_2 + (0)\, x_3 + (-1) x_4 \leq 1+{}^1\!/_2$$

$$x_2 + (0)\, x_3 + (-1) x_4 \leq 1$$

$$x_2 + (0)\, x_3 + (-1) x_4 + s = 1$$

$+$

$-$

$${}^3\!/_4\, x_3 + {}^3\!/_4\, x_4 - s = {}^1\!/_2$$

$${}^3\!/_4\, x_3 + {}^3\!/_4\, x_4 \geq {}^1\!/_2$$

Formule générale de la coupe: $\boxed{\sum_{j \text{ t.q. } x_j \text{ hors-base}} \mathrm{f}_{ij} x_j \geq \mathrm{f}_i}$

Algorithme des coupes de Gomory

base	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
			$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{13}{2}+z$

Coupe à ajouter

$$\tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 \geq \tfrac{1}{2} \longrightarrow \tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 - s = \tfrac{1}{2} \longrightarrow -\tfrac{1}{4}x_3 - \tfrac{1}{4}x_4 + s = -\tfrac{1}{2}$$

base	x_1	x_2	x_3	x_4	s	
x_1	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$
s			$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$
			$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{13}{2}+z$

Solution de base non réalisable car $s<0$

Algorithme dual du simplexe

base	x_1	x_2	x_3	x_4	s	
x_1	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$
s			$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$
			$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{13}{2}+z$

$\longrightarrow$ s sort

Qui rentre?

$(-\frac{5}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = -\frac{13}{2} + z) + \rho\times(-\frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + s = -\frac{1}{2})$

$(-\frac{5}{4} + \rho\times(-\frac{1}{4}))x_3 + (-\frac{1}{4} + \rho\times(-\frac{1}{4}))x_4 + \rho\times s = -\frac{13}{2} + \rho\times(-\frac{1}{2}) + z$

les coûts réduits sont ≤ 0 :

$-\frac{5}{4} + \rho\times(-\frac{1}{4}) \leq 0$, $-\frac{1}{4} + \rho\times(-\frac{1}{4}) \leq 0$, $\rho \leq 0$,

ce qui donne $(-\frac{5}{4})/(\frac{1}{4}) \leq \rho$, $(-\frac{1}{4})/(\frac{1}{4}) \leq \rho$, $\rho \leq 0$.

Pour qu'un coût réduit s'annule il faut prendre :

$\rho = \max\{(-\frac{5}{4})/(\frac{1}{4}), (-\frac{1}{4})/(\frac{1}{4})\} = (-\frac{1}{4})/(\frac{1}{4})$

ce qui correspond à la variable x_4. La variable x_4 rentre en base.

Algorithme dual du simplexe (suite)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	s	
x_1	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$
s			$-\frac{1}{4}$	$\boxed{-\frac{1}{4}}$	1	$-\frac{1}{2}$
			$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{13}{2}+z$

s sort

x_4 rentre en base

base	x_1	x_2	x_3	x_4	s	
x_1	1		0	0	1	2
x_2		1	1	0	-1	2
x_4			1	1	-4	2
			-1	0	-1	$-6+z$

Solution ≥ 0 + Coûts réduits≤ 0 et on maximise $\Rightarrow$ STOP

Programmation linéaire en nombres entiers: modélisation

Un exemple:

n clients C_i $i=1,\ldots,n$ munis de poids $w_i>0$. C_i de coordonnées c_{1i} et c_{2i}

p magasins M_j $j=1,\ldots,p$. M_j de coordonnées m_{1j} et m_{2j}

Un nouveau magasin M concurrent veut s 'implanter et maximiser le poids total des clients qu'il aura capturés

Un client i est capturé quand

$$d(C_i\,, M) \leq R_i=\min\{d(C_i\,, M_j) : j=1,\ldots,p\}$$

La distance du client i au nouveau magasin ≤ à la distance du client i au magasin déjà existant le plus proche

Modèle

Variables $\begin{cases} y_i\text{=1 si client } C_i \text{ est capturé , 0 sinon} \\ x_1, x_2 \text{ coordonnées du nouveau magasin} \\ d_i \text{ distance du client } C_i \text{ au nouveau magasin mesurée par la norme 1} \end{cases}$

$$\max \sum_{i=1,n} w_i y_i$$

$$\text{s.c.}\begin{cases} d_i - \mathrm{h} \times (1 - y_i) \leq \mathrm{R}_i & (1) \\ d_i \geq x_1 - \mathrm{c}_{1i} + x_2 - \mathrm{c}_{2i} & (2.1) \\ d_i \geq x_1 - \mathrm{c}_{1i} - x_2 + \mathrm{c}_{2i} & (2.2) \\ d_i \geq -x_1 + \mathrm{c}_{1i} + x_2 - \mathrm{c}_{2i} & (2.3) \\ d_i \geq -x_1 + \mathrm{c}_{1i} - x_2 + \mathrm{c}_{2i} & (2.4) \\ y_i \in \{0,1\} \end{cases} \quad i = 1,\ldots,n$$

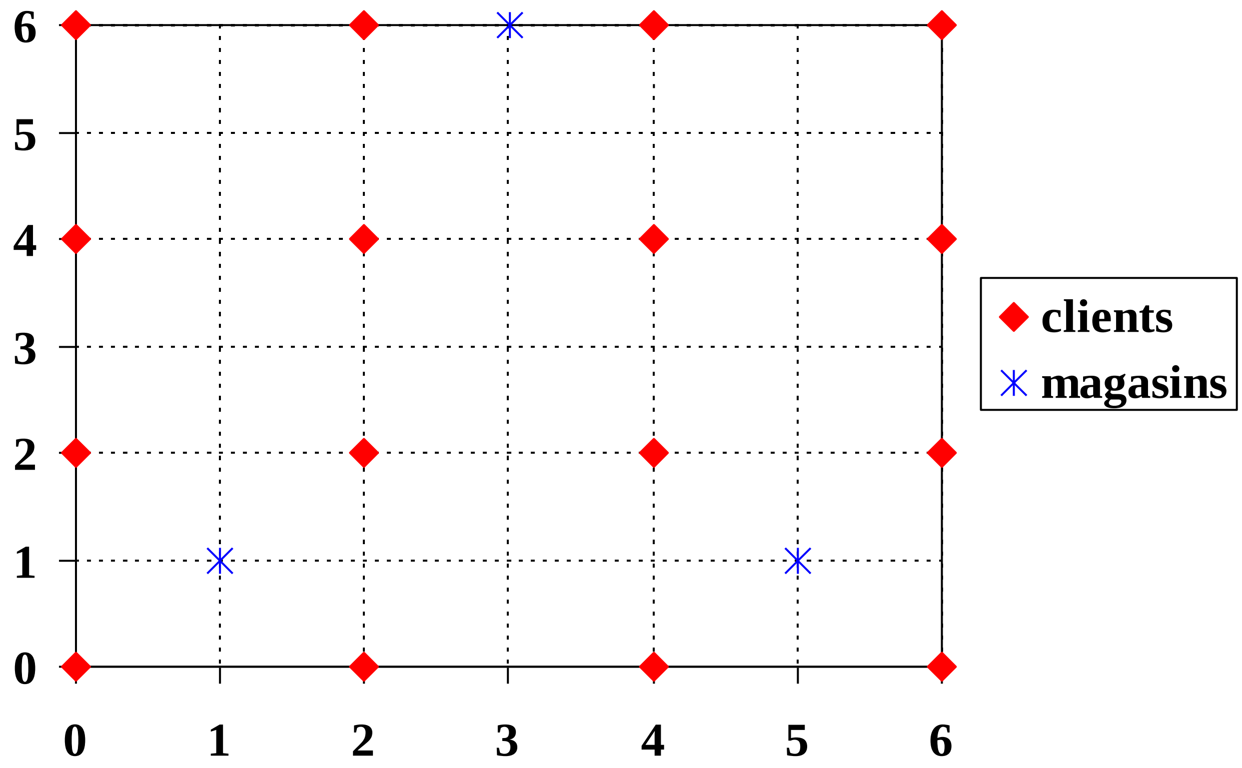
(1) $y_i=0 \Rightarrow d_i - \mathrm{h} \leq \mathrm{R}_i$ h constante suffisamment grande $\Rightarrow$ contrainte inopérante

(1) $y_i=1 \Rightarrow d_i \leq \mathrm{R}_i$ distance du client C_i au magasin $\leq$ min des distances aux autres magasins

(2.1) à (2.4) $\Leftrightarrow d_i \geq |x_1 - \mathrm{c}_{1i}| + |x_2 - \mathrm{c}_{2i}|$

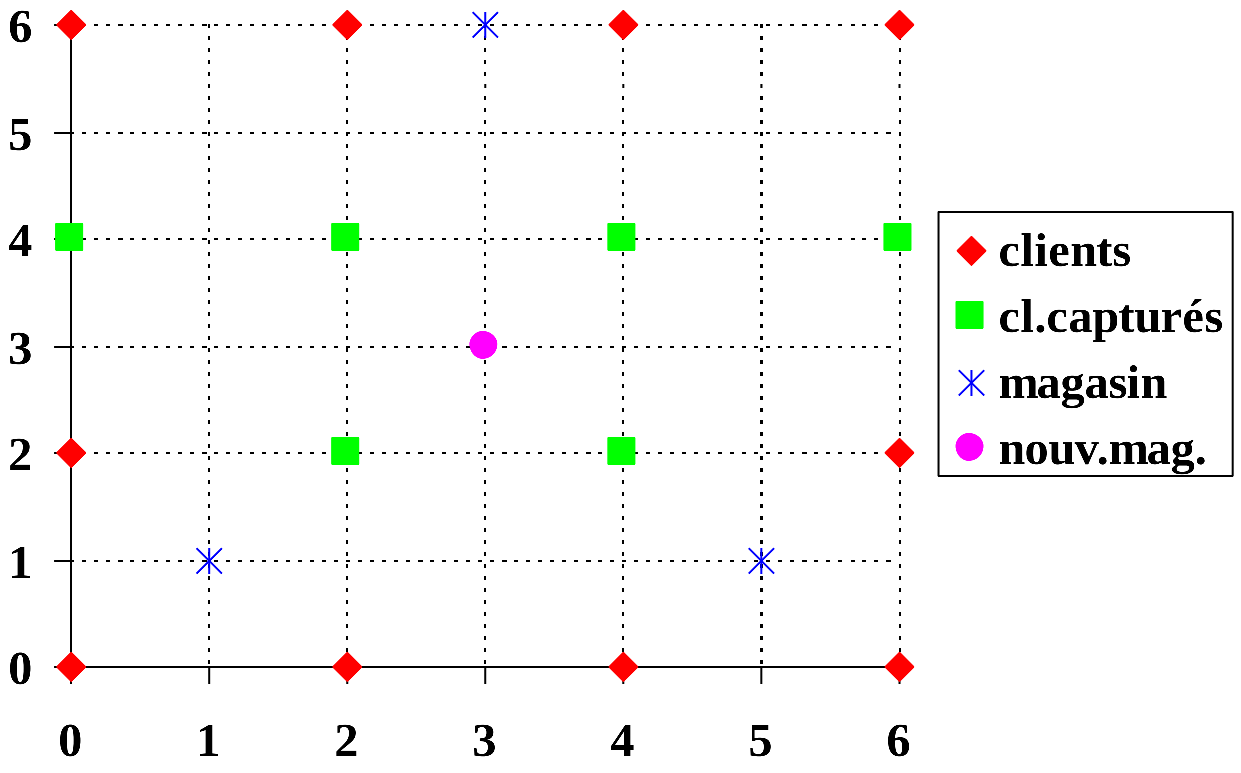
Exemple 1: 16 clients de poids 1 chacun

3 magasins déjà implantés

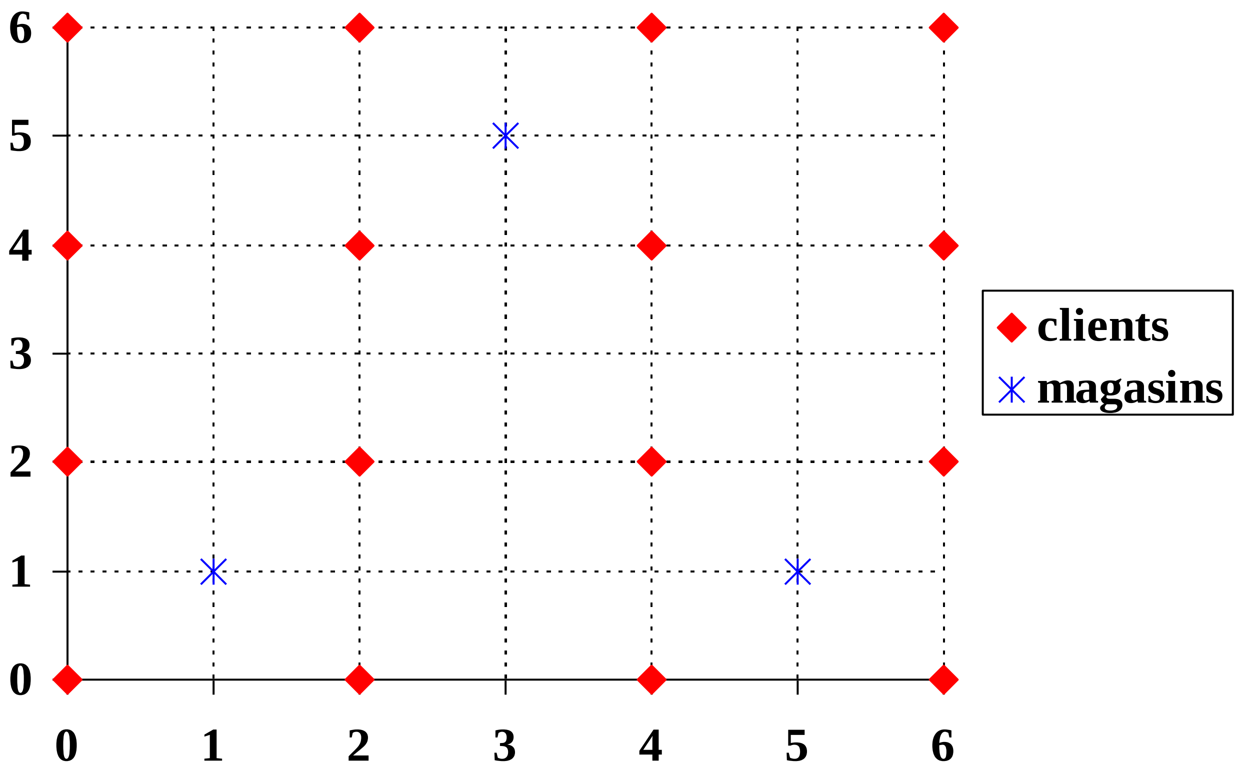


La distance max. entre deux points est h=12

Résultat: 6 clients capturés



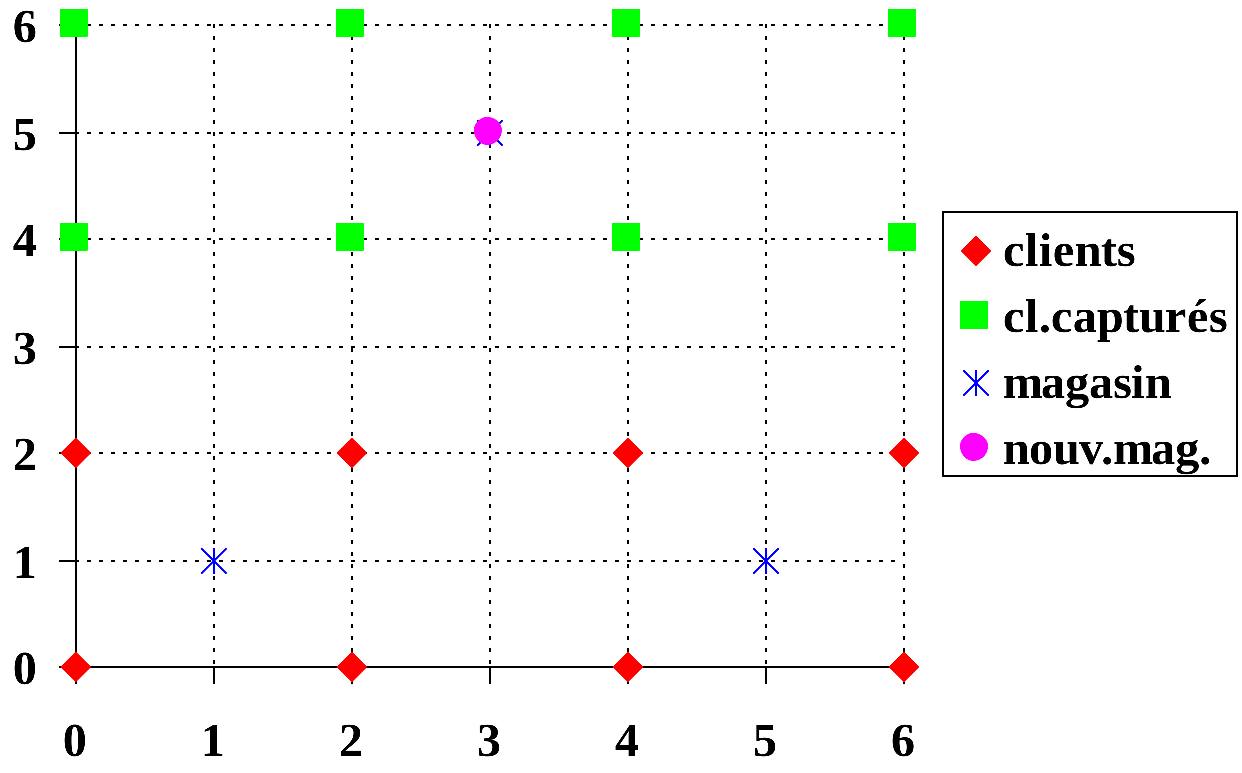
Exemple 2: 16 clients de poids 1 chacun
3 magasins déjà implantés



La distance max. entre deux points est h=12

Résultat: 8 clients capturés

Superposition du nouveau magasin sur un ancien. Pas très réaliste



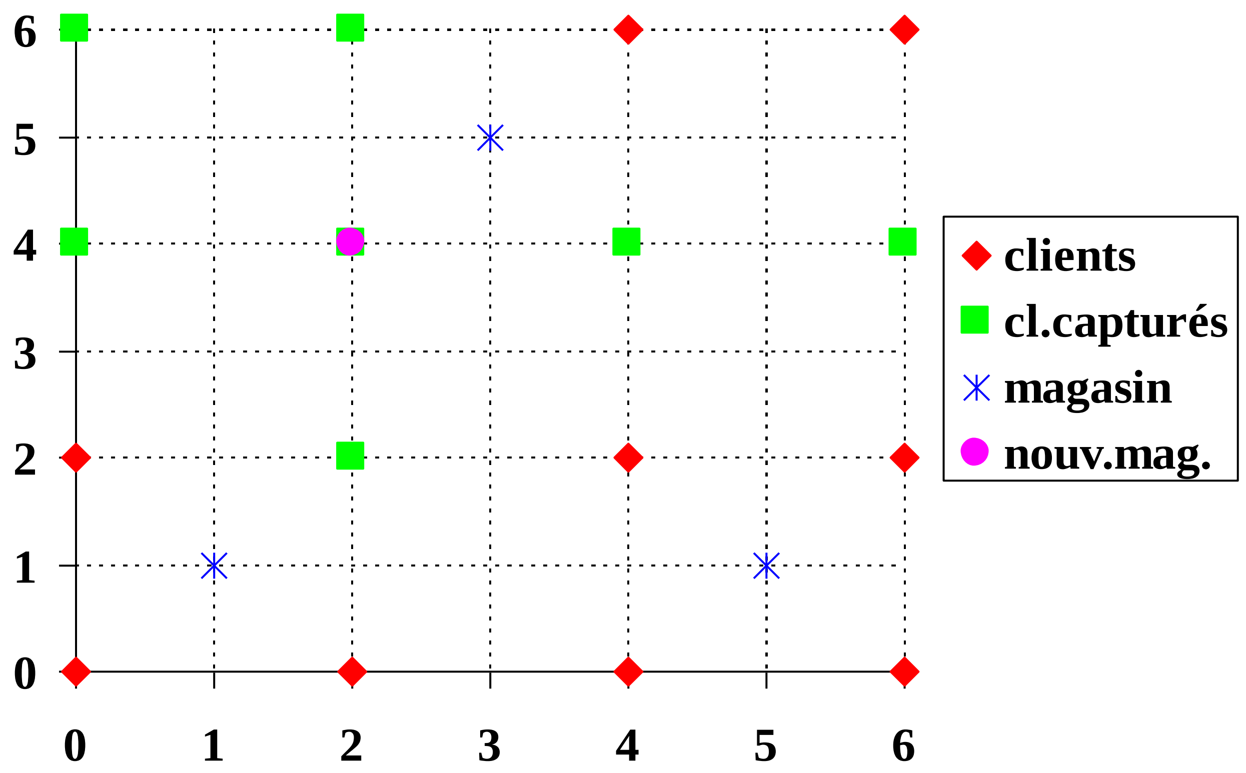
Modèle avec une distance min. S entre le nouveau magasin et les anciens

$$\max \sum_{i=1,n} w_i y_i$$

$$\text{s.c.}\begin{cases} \left.\begin{array}{ll} d_i - \mathrm{h}\times(1-y_i) \le \mathrm{R}_i & (1) \\ d_i \ge x_1 - \mathrm{c}_{1i} + x_2 - \mathrm{c}_{2i} & (2.1) \\ d_i \ge x_1 - \mathrm{c}_{1i} - x_2 + \mathrm{c}_{2i} & (2.2) \\ d_i \ge -x_1 + \mathrm{c}_{1i} + x_2 - \mathrm{c}_{2i} & (2.3) \\ d_i \ge -x_1 + \mathrm{c}_{1i} - x_2 + \mathrm{c}_{2i} & (2.4) \\ y_i \in \{0,1\} & \end{array}\right] i = 1,\dots,n \\ \left.\begin{array}{ll} x_1 - \mathrm{m}_{1j} + x_2 - \mathrm{m}_{2j} \ge -\mathrm{h} + (\mathrm{h}+\mathrm{S})z_{1j} & (3.1) \\ x_1 - \mathrm{m}_{1j} - x_2 + \mathrm{m}_{2j} \ge -\mathrm{h} + (\mathrm{h}+\mathrm{S})z_{2j} & (3.2) \\ -x_1 + \mathrm{m}_{1j} + x_2 - \mathrm{m}_{2j} \ge -\mathrm{h} + (\mathrm{h}+\mathrm{S})z_{3j} & (3.3) \\ -x_1 + \mathrm{m}_{1j} - x_2 + \mathrm{m}_{2j} \ge -\mathrm{h} + (\mathrm{h}+\mathrm{S})z_{4j} & (3.4) \\ z_{1j} + z_{2j} + z_{3j} + z_{4j} = 1 & (3.5) \\ z_{1j}, z_{2j}, z_{3j}, z_{4j} \in \{0,1\} & \end{array}\right] j = 1,\dots,p \end{cases}$$

(3.1) à (3.5) $\Leftrightarrow |x_1 - \mathrm{m}_{1j}| + |x_2 - \mathrm{m}_{2j}| \ge \mathrm{S}$

distance min. S=1 entre le nouveau magasin et les anciens
Résultat: 7 clients capturés



Remarques sur la PL et la PLNE

PL : min c$\boldsymbol{x}$ s.c. A$\boldsymbol{x}\geq$b $\boldsymbol{x}\geq 0$

PLNE : PL + contraintes d 'intégrité $\boldsymbol{x}\in\{0,1,2,...\}$

Problèmes de nature différente:

PL $\rightarrow$ continu

PLNE $\rightarrow$ discret

Algorithmes

PL : algorithme du simplexe
- on passe de points extrêmes en points extrêmes voisins
- cheminement sur la frontière du polyèdre

autres algorithmes : points intérieurs
- cheminement par l 'intérieur du polyèdre

PLNE : procédures arborescentes
méthodes de coupes
mixage des 2 approches

Applications

PL : planification , production , transport

PLNE : items indivisibles (non fractionnaires)

problèmes de décision (variables 0-1)

Dualité

<u>Dualité</u> :
relaxation des contraintes + injection dans l 'objectif

en **PL** $\rightarrow$ pas de saut de dualité
en **PLNE** $\rightarrow$ existence de saut de dualité

<u>Intérêt</u> :
var. duales mesurent l 'impact des contraintes sur l 'optimum

évaluation de l 'optimum (minorant pour un pb. minimiser)

utilisation dans procédures arborescentes