

Une application de la logique floue dans le domaine du choix des roulements à billes

Louis Gacogne

LAFORIA Université Paris VI, Place Jussieu 75252 Paris (44 27 70 01)
Institut d'Informatique d'Entreprise (CNAM)
Allée J.Rostand 91025 Evry (60 77 97 40)

Résumé

On souhaite tester dans cette application différents concepts issus des ensembles flous et de la théorie des possibilités. Le sujet consiste concrètement à choisir des types de roulements sur un arbre en rotation et à en calculer les caractéristiques en fonction de l'utilisation du montage. Ce problème se pose en permanence en mécanique et il n'est résolu par l'expert que de façon empirique, il se prête assez bien à la conception d'un système - expert flou dans la mesure où il existe dans ce domaine des recommandations, obligations ou interdictions données sous forme de règles mettant en cause des données imprécises telles que "grande vitesse", ainsi que des prédicats vagues mal définis comme "force axiale faible" ou "série de largeur lourde". D'autre part l'utilisation de tels prédicats et de données imprécises en entrée rend nécessaire un calcul sur des valeurs imprécises, floues ou incertaines. On utilise alors systématiquement des valeurs assignées de façon λ -trapézoïdale, des couples (nécessité - possibilité), et des prédicats purement qualitatifs ou pseudo - qualitatifs dans le cas où un calcul sur des valeurs floues permet de se ramener au quantitatif.

La déduction se fait suivant une définition de la distribution de possibilité $\pi(x,y)$ pour l'équivalence x est $A \Leftrightarrow y$ est B généralisant l'implication de Lukasiewicz en logique multivaluée, les règles sont alors toutes de même nature y compris celles qui correspondent à l'application d'une formule floue établie empiriquement. On parle à ce propos de "fonction trapézoïdale", dans le but de formaliser des règles graduelles telles que "Plus la force radiale est forte, plus il faut choisir une grande série de diamètre".

De plus le système exécute, lorsque les données initiales sont incomplètes, des choix sur un certain nombre de qualités, et explore l'arborescence de toutes les réponses au problème.

Abstract

The subject of the application is the choice of balls-bearing on an axis and the compute of the characteristics of them according to the use of the assembling. We wish, here, to test some concepts about fuzzy sets and possibility theory because this problem permanently rise in mechanics and is resolved in an empirical way. This question is open to a fuzzy expert system because there are many recommendations, obligations or interdictions given with imprecise datas such "great speed", or also vague predicates undetermined such "weak axis power" or "heavy width series". We use then values given in a λ -trapezoidal way, couples (necessity - possibility), and purely qualitative predicates or pseudo - qualitative in the case where it is possible to reduce to the quantitative.

We make a deduction according to a possibility distribution $\pi(x,y)$ for the equivalence " x is $A \Leftrightarrow y$ is B " which generalize the Lukasiewicz' one, the rules are all on the same type, even if they express a fuzzy empirical formula. We say about "trapezoidal function" for this, with the aim to formalize gradual rules such that "the more the radial power is strong, the more it must choose a great diameter series".

Moreover the system performs several choices on a few numbers of qualities, and do a backtracking with the tree of all solutions to the problem.

Mots clés

Imprécision - Incertitude - Prédicats vagues - Raisonnement approximatif

Keywords

Imprecision - Uncertainty - Vagueness - Approximate reasoning

Le présent travail tente de donner des bases homogènes à un système-expert travaillant avec des faits "vagues", des variables recevant des valeurs "imprécises" et "incertaines" et un schéma d'inférence du "modus - ponens généralisé". L'application concerne le problème du choix des roulements sur un arbre en rotation où s'exercent des forces. Cette étude se prête à l'aspect déclaratif par des règles telles que "déversement même faible \Rightarrow pas de butée", et se prête à l'utilisation du flou de par l'existence de séries classant les roulements suivant leurs

tailles, ainsi que par le fait que les données initiales peuvent être des intervalles ou des appréciations comme "vitesse très élevée" ou "force axiale faible".

1 Le cadre théorique

Quatre idées dominent la conception du système :

Les valeurs floues

Toutes les valeurs de variables vont admettre une représentation informatique dite λ -trapézoïdale, [Buisson Farreny Prade 86] traduisant l'imprécision (la valeur se trouve dans un intervalle flou) et leur incertitude (le niveau de confiance en l'affirmation de cette appartenance est également pris en compte). Pour une variable X assignée à un quintuplet $(a, b, \alpha, \beta, \lambda)$ avec $a - \alpha \leq a \leq b \leq b + \beta$ [Martin - Clouaire Prade 86], et λ (le niveau d'incertitude) un réel de $[0, 1]$, l'intervalle $[a, b]$ représente l'ensemble des valeurs tout-à-fait possibles (le noyau), les intervalles à gauche et à droite de longueur respectives α et β , les valeurs plus ou moins possibles et l'intervalle $[a - \alpha, b + \beta]$ est l'ensemble des valeurs possibles (le support) dans le cas où λ est nul. λ mesure donc ici la possibilité que X soit en dehors de ce que l'on continuera d'appeler le support; c'est en quelque sorte l'incertitude quant au fait que X ait effectivement cette valeur-intervalle.

Le couple possibilité - nécessité

Tous les faits sont affectés d'un couple de valeurs mesurant leur degré de vérité et leur degré d'incertitude, ou bien, ce qui revient au même, d'un couple "nécessité - possibilité" vérifiant l'inégalité $nc(P) \leq ps(P)$. Nous faisons le même choix que [Zadeh 78] d'une mesure de possibilité vérifiant l'égalité $ps(P \vee Q) = \max(ps(P), ps(Q))$.

En définissant $P \wedge Q$ comme $\neg(\neg P \vee \neg Q)$, nous faisons également le choix de l'égalité en ce qui concerne la conjonction $ps(P \wedge Q) = \min(ps(P), ps(Q))$, ce qui en fait en même temps une mesure de nécessité [Dubois Prade 85]. Mais nous réservons ce terme pour la mesure nc définie par :

$$nc(P) = 1 - ps(\neg P) \text{ et } ps(P) = 1 - nc(\neg P)$$

Nous déduisons de ces axiomes que $\neg \neg P$ et P ont mêmes valeurs de confiance.

D'autre part les lois de Morgan qui sont acquises puisque la conjonction a été définie plus haut à partir de la disjonction, nous donnent :

$$nc(P \wedge Q) = \min(nc(P), nc(Q)) \quad nc(P \vee Q) = \max(nc(P), nc(Q))$$

Cependant nous ne nous plaçons pas dans la théorie des possibilités en n'imposant plus l'axiome : $nc(P) > 0 \Rightarrow ps(P) = 1$.

La représentation des prédicats

Tout prédicat unaire R est aussi considéré comme "vague" et nous lui donnons une réalisation trapézoïdale analogue à celle des variables. Nous notons la proposition R(X) sous la forme "X est R", ses valeurs de confiance seront notées $1 - \varepsilon$ et μ .

Mais pour exprimer ces valeurs de confiance, nous avons besoin de regarder les positions relatives de deux sous-ensembles flous trapézoïdaux A et A' sur un univers U.

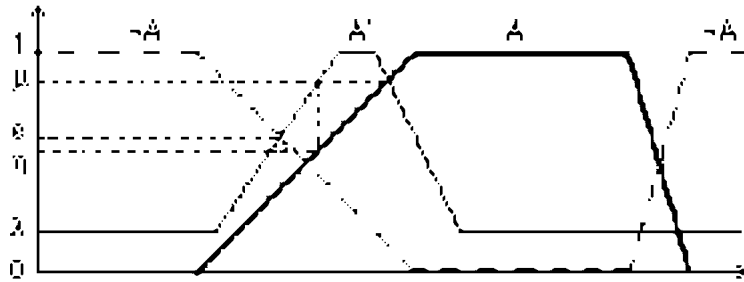
Définissant classiquement $\mu = ps(A' \text{ est } A) = \sup_{x \in U} \{ \min(\mu_{A'}(x), \mu_A(x)) \}$ la possibilité que X soit A (si A est une réalisation trapézoïdale du prédicat R), lorsque X admet la valeur A', c'est un degré d'intersection entre A et A'.

D'autre part $\varepsilon = ps(A' \text{ est } \neg A) = \sup_{x \in U} \{ \min(\mu_{A'}(x), 1 - \mu_A(x)) \}$ est la possibilité que X ne soit pas A, $1 - \varepsilon$ représente la nécessité de "X est A", c'est un degré d'inclusion de A' dans A.

Un troisième paramètre est utile à évaluer la proximité de A' par rapport à A :

$$\eta = \inf_{x \in U} \{ \mu_A(x) / \mu_{A'}(x) > \mu \} \text{ où } \mu = \text{ps}(A' \text{ est } A)$$

Ces trois paramètres sont illustrés par le schéma :



L'idée de représenter des prédicats de cette façon n'est certes pas neuve [Zadeh 79], [Sanchez 80], mais ici, on a cherché lorsque cela est possible, une définition relative de ces prédicats en termes de rapports ou de produits simples. Le système essaie de prendre des prédicats initiaux, les plus vagues possibles, afin de rejoindre les énoncés de sens commun, il tient pour acquis leurs définitions, ainsi définit-on la "longueur" relative d'un arbre en rotation, comme le quotient de sa véritable longueur par son diamètre. La série de diamètre sera le rapport des diamètres extérieur et intérieur. Cette "longueur vague" peut alors être qualifiée de "très courte", "normale" etc... Celle de série de diamètre sera qualifiée de "très légère", "légère", "normale", "lourde"... Ces qualifications étant réalisées par des trapèzes se chevauchant légèrement.

L'intérêt d'un petit nombre de qualificatifs vagues est aussi par ailleurs de pouvoir réaliser automatiquement des choix en discrétisant des grandeurs continues, et d'y faire agir un "backtrack", ce que fait le système.

La déduction approchée

Toutes les règles sont affectées de deux coefficients correspondant à un degré de suffisance s , mais aussi un degré de nécessité n qui n'est autre que le degré de suffisance de l'implication inverse. On reprend l'idée avancée par [Dubois Prade 86, Farenny Prade 86] inspirée de la formule de Bayes en calcul des probabilités dans le cas d'une règle à une seule prémisse $P \Rightarrow Q$, qui, transposée aux coefficients de possibilités pour Q et pour $\neg Q$ s'écrit matriciellement [Farenny Prade Wyss 86] pour les opérations max et min au lieu de la somme et du produit.

$$\begin{bmatrix} \text{ps}(Q) \\ \text{ps}(\neg Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ps}(Q|P) & \text{ps}(Q|\neg P) \\ \text{ps}(\neg Q|P) & \text{ps}(\neg Q|\neg P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ps}(P) \\ \text{ps}(\neg P) \end{bmatrix}$$

Relation dans laquelle les quatre possibilités "conditionnelles" du type $\text{ps}(Q|P)$, restent à définir. Ces mêmes auteurs proposent 1 et 1-s pour la première colonne en signalant que s peut être considéré comme la nécessité de Q connaissant P .

Pour notre part, nous choisirons par analogie de définir $\text{ps}(Q|\neg P)$ comme la possibilité d'avoir Q connaissant $\neg P$, soit 1-n.

$$\begin{bmatrix} \text{ps}(Q) \\ \text{ps}(\neg Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-n \\ 1-s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ps}(P) \\ \text{ps}(\neg P) \end{bmatrix}$$

Soit en développant :

$$(1) \quad \text{ps}(Q) = \max(\text{ps}(P), 1 - \max(n, \text{nc}(P))) \quad \text{nc}(Q) = \min(\text{nc}(P), \max(s, 1 - \text{ps}(P)))$$

Pour le mode d'inférence approché, nous avons suivi la voie ouverte par le modus-ponens généralisé de [Zadeh 78], mais nous proposons une relation entre les distributions de possibilités afin de généraliser l'équivalence. A partir des travaux de Zadeh et de [Dubois-Prade 85] on donne ici une fonction π de la possibilité pour un couple de valeurs précises (x, y) d'avoir $B(y)$ conditionné par le fait que l'on a $A(x)$. C'est à dire une distribution de possibilité d'un couple de variables (x,y) , pour une règle du type $A(x) \Rightarrow B(y)$, ou, en d'autres termes, de la forme "si X est A, alors_(s,n) Y est B".

Cette définition donne une généralisation de l'équivalence booléenne, comme une fonction π (dernière colonne du tableau suivant), que l'on compare avec l'implication $P \Rightarrow Q$ lorsque les deux membres P et Q sont binaires.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \leftarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow_{s,n} Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	$1-s$
0	1	1	0	0	$1-n$
0	0	1	1	1	1

On voit donc seulement avec ces quatre cas de la logique binaire classique, que plus s est grand et n petit, plus on se rapproche de l'implication et plus s et n sont grands, plus on se rapproche de l'équivalence.

Nous proposons donc de choisir une distribution π , tenant compte de ces deux coefficients s et n :

$$(2) \quad \pi(x, y) = \text{si } \mu_A(x) < \mu_B(y) \text{ alors } 1 - n[\mu_B(x) - \mu_A(y)], \text{ sinon } 1 - s[\mu_A(x) - \mu_B(y)]$$

Dans cette définition, nous sommes en accord, avec celle de Lukasiewicz :

$\min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y))$ en logique multivaluée, dans le cas où l'implication est exacte ($s = 1$ et $n = 0$). Nous pouvons également vérifier que la contraposition fonctionne, et donc parler d'un "modus- tollens généralisé", la règle $\neg B(y) \Rightarrow \neg A(x)$, affectée des mêmes coefficients s et n, possédant la même distribution de possibilité π .

Lors d'une déduction $P \Rightarrow_{s,n} Q$ où P et Q sont respectivement les propositions "X est A" et "Y est B", si la variable X est assignée au λ -trapèze A' que l'on va comparer avec le trapèze représentant le prédicat A, Y va être assignée à un λ -trapèze B' correspondant à une approximation de :

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in U} \{ \min(\mu_{A'}(x), \pi(x,y)) \}, \text{ solution générale donnée par [Zadeh 78].}$$

La construction du trapèze B', nécessite des conditions imposées par (1), celles-ci d'après [Gacogne 90], sont : $\varepsilon \leq \mu$

$$\text{Puis posant } v = nc(B' \text{ est } \neg B) = \min(1-\varepsilon, \max(s, 1-\mu)), \text{ on obtient une seconde condition } v \leq \mu$$

En calculant $\lambda = \text{si } v \geq \eta \text{ alors } \varepsilon \text{ sinon } 1 - (\mu + v - 1)\eta / (\eta - v)$, on aboutit à un λ -trapèze $B' = (a - \alpha(1-\eta), b + \beta(1-\eta), \eta\alpha, \eta\beta, \lambda)$ de même support que B et de noyau recouvrant celui de B.

On vérifie la compatibilité avec le modus-ponens classique c'est-à-dire lorsque $A'=A$.

a) $A'=A$ non flou (A est un rectangle) et $s=1$ (implication exacte) donnent $\mu = 1, \eta = 1, \varepsilon = 0, v = 1, \lambda = 0$, donc B' a le même noyau que B et son niveau d'incertitude est nul, donc on obtient $B' = B$.

b) $A'=A$ flou (A est un trapèze) et $s = 1$ donnent :

$\mu = 1, \eta = 1, \varepsilon = 1/2$ à cause des "pentes", $v = \min(1/2, 1) = 1/2$,

$\lambda = 1/2$, donc B' et B ont même noyau et même support, mais B' possède un niveau d'incertitude égal à $1/2$, ce qui s'explique par le fait que la variable X étant assignée à A, peut également (avec une possibilité maximale $1/2$) être $\neg A$.

c) A' a mêmes noyau et support que A, mais est flou et incertain (A' est un λ -trapèze) et s est encore égal à 1 :

$\mu = 1, \eta = 1, \varepsilon$ peut alors être élevé, $v = 1 - \varepsilon$ devient faible, et le calcul donne $\lambda = 2 - 1/\varepsilon$ qui est croissant pour $1/2 < \varepsilon < 1$, donc B' et B ont encore mêmes noyau et support, mais B' possède le niveau d'incertitude λ .

d) Dans les mêmes conditions qu'en c), mais avec un coefficient de suffisance s différent de 1, nous avons :

$\mu = 1, h = 1$ et $v = \min(1 - \varepsilon, s)$ et la même conclusion pour B' avec un niveau d'incertitude $\lambda = (1 - 2v)/(1 - v)$.

2 L'application

Présentation du problème

Le problème concret du choix des roulements dans la conception d'un montage mécanique réunit un certain nombre de caractères "vagues". Le choix se fait traditionnellement par le biais de recommandations telles que "plus la force axiale est importante, plus il convient de choisir une série de diamètre lourde", il existe des séries de largeur et de diamètres dénommées "légère", "moyenne", "lourde" etc... sans d'ailleurs que ces qualificatifs soient très clairement définis. Enfin les exigences d'un montage peuvent être très diverses par leurs nombre et leurs natures, certaines données peuvent être précises ($F_a = 4500$ Newton), imprécises ($30 < d < 45$ mm), certaines (types rigides interdits), incertaines (type "BC" recommandé mais non imposé), vagues (axe court, vitesse moyenne,...). Ce sont ces considérations qui légitiment l'approche déclarative dans l'énoncé des règles et surtout l'utilisation du flou.

En simplifiant, la pratique de l'expert consiste à faire un choix sur un type de roulement, puis à faire des essais successifs, sur les dimensions, et, en fonction de la capacité C du roulement et des forces en présence, de calculer la charge équivalente P, puis la durée de vie L du roulement. Ce travail se fait par consultation de catalogues où les roulements de dimensions et capacités précises sont groupés par types et séries de dimensions, puis par application de formules empiriques.

Notre souhait est de pouvoir faire jouer le même rôle à des règles traduisant des recommandations, des règles exprimant un classement des roulements en types et sous-types, et des règles exprimant une formule. Nous avons cependant fractionné les règles en plusieurs paquets reflétant un certain ordre naturel à ce problème. Le système fonctionne en chaînage - avant sur chaque base de règles en opérant un "backtrack" à chaque étape de la décision, c'est à dire que suivant les données, il peut être amené à choisir le nombre d'appuis et le nombre de roulements par appui, puis à sélectionner chaque roulement en envisageant une suite de prédicats vagues (les séries de dimensions ...), et différents types de roulements etc... Il est doublé par deux schémas de règles assurant la déduction par calcul (si "longueur" vague et I_g précis sont connus, alors le diamètre est déduit suivant un intervalle flou) ou par l'héritage d'une propriété sur un ascendant.

Les pseudo-qualités

Un certain nombre de données peuvent être exprimées de façon relative et vague (la force axiale est forte, l'arbre est court, la série de largeur est légère...), ce qui nous a amené au concept de pseudo-qualité. Nous nommons ainsi un ensemble d'attributs ayant de telles

appellations dans la pratique, et pour lesquels nous sommes en mesure de donner une définition même sommaire et provisoire. Ainsi à côté de la "longueur" dont nous avons déjà parlé, nous avons la "force radiale vague" calculée comme le produit de la "contrainte" par la "longueur", la "contrainte" comme le quotient de la force radiale effective F_r par la section de l'arbre, ou encore la "force axiale vague" comme le quotient F_a/F_r .

Nous exploitons systématiquement cette notion de "pseudo - qualité", en faisant des inférences chaque fois que cela est possible. Parallèlement au système - expert fonctionnant en marche - avant, un schéma de règle de calcul permet d'enchaîner des déductions : lorsqu'une définition existe comme, par exemple, "serie de diamètre" = "diamètre extérieur"/"diamètre intérieur", qui peut être très légère, légère, normale, moyenne ou lourde, alors la connaissance, soit directe, soit par un de ces qualificatifs, de deux valeurs, entraîne une assignation du troisième paramètre. Ainsi les connaissances de "longueur courte", de "force axiale forte" et du diamètre donné comme intervalle flou entraînent celle de la longueur absolue mais floue, puis celle floue de "contrainte", d'un intervalle flou pour F_r , de la "force radiale vague", et enfin du déversement admissible (angle que peut prendre l'axe en un appui). C'est alors que l'examen des règles par exemple :

"roulement à simple rangée de rouleaux" \Rightarrow deversement $< 6^\circ$ ", peut interdire ce type de roulement par contraposition.

Signalons en outre, que l'on peut envisager le calcul de la confiance du fait (A longueur court) à partir du fait (A court vrai) ne représentant pas, en tout état de cause, les mêmes informations. Par contre les faits (M ambiance bonne) et (M bonne-ambiance vrai) restent indépendants tant que la qualité "ambiance de fonctionnement" n'a pas reçu de définition (celle-ci est une qualité "pure" et non une "pseudo-qualité").

Les fonctions trapézoïdales

Dans cette application nous avons été confronté à la notion de règle graduelle comme :
"plus le volume d'un roulement est grand, plus sa capacité dynamique C est grande"

Soit, et c'est le cas ci-dessus, le paramètre C est donnée dans des tables de dimensions de roulements, soit, comme par exemple, pour le calcul de la charge équivalente P en fonction de la force axiale, le paramètre P étant donné par des formules d'approximations, nous proposons alors de déduire d'un nuage expérimental de points (x, y), ce que nous appelons une "fonction trapézoïdale" F. Nous définissons une fonction trapézoïdale F par 4 fonctions numériques :

$(f_a \ f_b \ f_\alpha \ f_\beta)$ avec $f_a < f_b$ et $0 < f_\alpha, f_\beta$. Si X est assigné à un intervalle flou $(a \ b \ \alpha \ \beta \ \lambda)$, alors la variable image Y calculée par F notée $Y = F(X)$ sera assignée à :

$$(f_a(a) \ f_b(b) \ f_a(a)-f_a(a-\alpha)+f_\alpha(a-\alpha) \ f_b(b+\beta)-f_b(b)+f_\beta(b+\beta))$$

Ce concept nous est alors très utile pour substituer une seule relation fonctionnelle $Y = F(X)$ entre valeurs floues, à un ensemble de règles qui modéliserait le fait que "plus X est grand, plus Y est grand".

Dans l'application, un certain nombre de fonctions ont, ainsi été recherchées expérimentalement, nous obtenons alors des règles telles que :

$$R \text{ rouleaux} \Rightarrow C = FCR(\text{Volume})$$

$$\text{avec le quadruplet de fonctions : } FCR = (3,15x^{0,65} \ 3,44x^{0,66} \ 0 \ 0)$$

Conclusion

Notre objectif étant de tester les concepts possibilistes et ceux que nous introduisons, l'application nous permet d'illustrer en particulier des prédicats vagues tout en les remettant légèrement en cause, au vu de règles séparées comme :

(force radiale modérée \Rightarrow série de diamètre normale)

(force radiale forte \Rightarrow série de diamètre moyenne) qui, soit, s'appliquent avec incertitude en parallèle, soit, risquent de ne pas s'appliquer dans certains cas, suivant la plus ou moins grande proximité des réalisations de "modérée" et "forte". La notion de fonction trapézoïdale permet d'éviter cela par sa continuité.

L'expérimentation, actuellement au niveau de la maquette, tend à montrer les limites de ce genre de représentations de prédicats, elle montre en revanche l'utilité d'un concept très simple de fonction trapézoïdale. L'ambition à long terme de ce système est d'établir, et de modifier les prédicats vagues par la donnée d'exemples et de contre-exemples, en vue d'une traduction automatique, dans des cas limités, de certains prédicats "qualitatifs" mais "quantifiables".

Bibliographie

[BUISSON FARENNEY PRADE 86] BUISSON J.C. FARENNEY H. PRADE H. Dealing with imprecision and uncertainty in the expert system Diabeto III, Actes du 2^o colloque d'intelligence artificielle de Marseille, décembre 1986 p.705-721

[DUBOIS PRADE 85] DUBOIS D. PRADE H. Théorie des possibilités, Masson 1985

[DUBOIS PRADE 86] DUBOIS D. PRADE H. Mesure de possibilité et théorie de Shafer, Rapport LSI n° 243 Université Paul Sabatier Toulouse 1986

[DUBOIS PRADE 86] DUBOIS D. PRADE H. Possibilistic inference under matrix form, Rapport LSI n° 247 Toulouse 1986

[FARENNEY PRADE 86] FARENNEY H. PRADE H. Default and inexact reasoning with possibility degrees, Rapport LSI n°247, 1986

[FARENNEY PRADE WYSS 86] FARENNEY H. PRADE H. WYSS E. Approximate reasoning in a rule - based expert system using a possibility theory : a case study. Information processing, North Holland 1986

[GACOGNE 90] GACOGNE L. Contribution à la représentation des connaissances floues et mise en oeuvre d'un système de raisonnement approché, Thèse Paris VII, 1990

[MARTIN-CLOUAIRE PRADE 86] MARTIN-CLOUAIRE R. PRADE H. 86 SPII-1 A simple inference engine capable of accomodation both imprecision and uncertainty, Computer-assisted decision making, North Holland 1986

[SANCHEZ 80] SANCHEZ E. Mesures de possibilité, qualifications de vérité et classification de formes linguistiques en médecine, Actes Table ronde C.N.R.S. Lyon 1980

[ZADEH 78] ZADEH L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems n°1 p.3-28 1978

[ZADEH 79] ZADEH L.A. A theory of approximate reasoning, Machine intelligence, vol.9 p 149-194 1979