Examen de programmation avancée

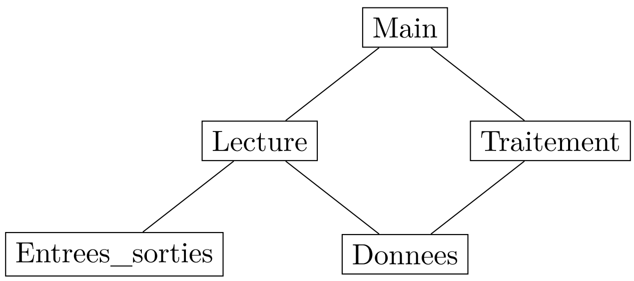
ENSIIE, semestre 2

mercredi 28 mars 2011

Durée : 1h45.
Tout document personnel autorisé (pas de prêt entre voisins). L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique n'est pas autorisé.
Ce sujet comporte 4 exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre voulu. Il contient 2 pages.
Le barème est donné à titre indicatif, il est susceptible d'être modifié. Le total est sur 20 points.

Exercice 1 : Makefile (4 points)

On a choisi de découper un projet selon les modules suivants :



Un module m1 est relié par une arête vers le bas à un autre module m2 si m1 dépend de (l'interface de) m2. On suppose que chaque module sauf Main a une interface explicite.

Écrire le `Makefile` correspondant. On pourra considérer au choix que les modules sont des fichiers C ou OCaml. On n'oubliera pas d'écrire une cible pour produire l'exécutable final qu'on appellera `prog`.

Exercice 2 : Modularité (3 points)

Pour chacun des énoncés suivants, donner la propriété assurée par la modularité qui correspond.

1. Depuis l'extérieur, on a une vue de haut niveau du module qui permet de ne pas se préoccuper de son implémentation concrète.
2. Chaque module peut être développé indépendamment des autres tant que son interface ne change pas.
3. Le développeur d'un module peut supposer que certains invariants sur les structures de données sont vrais puisque la seule façon de construire ces données en dehors du module se fait via des fonctions qui garantissent ces invariants.
4. On peut créer et utiliser des bibliothèques, il n'est pas nécessaire de réinventer la roue à chaque projet.
5. Il est possible de modifier un module (pour l'améliorer par exemple), sans avoir à modifier l'ensemble du projet.
6. On peut définir une fonction avec le même nom dans deux modules différents.

Exercice 3 : Arbres de Fibonacci (9 points)

Un arbre binaire sera considéré comme équilibré si *en tout nœud* les hauteurs des sous-arbres gauche et droit ne diffèrent au maximum que de 1. Un arbre est un AVL s'il est équilibré et s'il s'agit d'un arbre binaire de recherche.

Les arbres de Fibonacci sont les arbres de la suite :

- A_0 : l'arbre vide
- A_1 : l'arbre réduit à un nœud
- A_n : l'arbre contenant une racine avec A_{n-1} pour sous-arbre gauche et A_{n-2} pour sous-arbre droit.

1. Donnez une représentation graphique de A_2, A_3, A_4 et A_5
2. Soit la structure suivante habituelle des arbres binaires d'entiers, en C :

   ```
   typedef struct ABR {
       int val ;
       struct ABR *fg, *fd ;
   } *abr;
   ```

   en OCaml :

   ```
   type abr = Empty | Node of abr * int * abr
   ```

   Écrivez en C ou en OCaml, une fonction `hfibo` qui prend en entrée un arbre binaire d'entiers et retourne un entier qui vaut -1 si l'arbre n'est pas un arbre de Fibonacci et la hauteur de l'arbre sinon. La hauteur de l'arbre vide est 0, celle de l'arbre réduit à un nœud est 1.
3. Donner la complexité de la fonction `hfibo`.
4. On rappelle que la suite de Fibonacci est défini par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Donnez la hauteur h_n et le nombre de nœuds N_n de l'arbre A_n (potentiellement en fonction de F_n).
5. Montrez *rigoureusement* par induction que les arbres de Fibonacci sont équilibrés.
6. Quel lien existe t-il entre les AVL et les arbres de Fibonacci ? En déduire les tailles (nombre de nœuds) minimum et maximum d'un AVL de hauteur h.

Exercice 4 : Fonction de hachage (4 points)

On rappelle le fonctionnement de la méthode de la multiplication comme fonction de hachage h_{mult}. Soit A une constante réelle telle que $0 < A < 1$. Étant donnée une clef entière k et une taille de table m, on prend d'abord la partie fractionnaire f de $k \times A$, c'est-à-dire les chiffres après la virgule. On a donc $0 \leq f < 1$. On multiplie ce réel par m, on retourne pour $h_{mult}(h, m)$ la partie entière qui est donc comprise entre 0 et $m - 1$ comme attendu.

1. On pose $A = 0,5$. Quelles sont les valeurs possibles de f ? En déduire les valeurs possibles retournées par $h_{mult}(k, m)$. $A = 0,5$ est-il un bon choix ?
2. Plus généralement, on considère $A = \frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers premiers entre eux. Dans ce cas, on rappelle que p engendre $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, en d'autres termes $\{k \times p \mod q : k \in \mathbb{N}\} = \{0; \ldots; q-1\}$. Quelles sont les valeurs possibles de f ? En déduire les valeurs possibles retournées par $h_{mult}(k, m)$. Est-il judicieux de choisir un nombre rationnel pour A ?