Terminaison (1)

Xavier Urbain

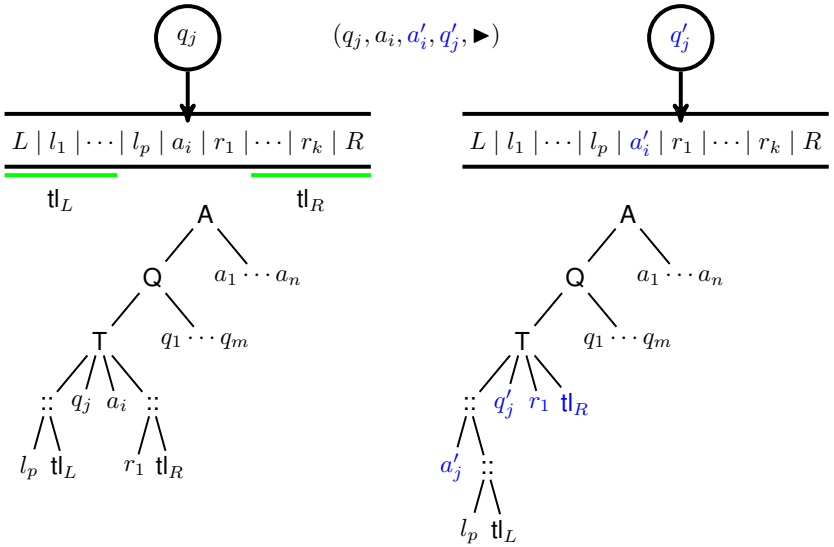
MPRI – Démonstration automatique

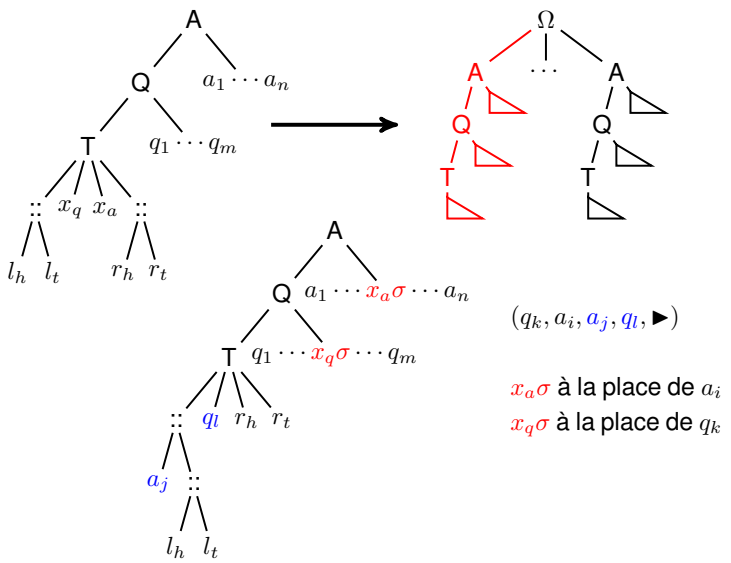
Terminaison : généralités

Propriété fondamentale :

- Inductions,
- Totalité des fonctions,
- Préliminaire,
- Autostabilisation, vivacité, etc.

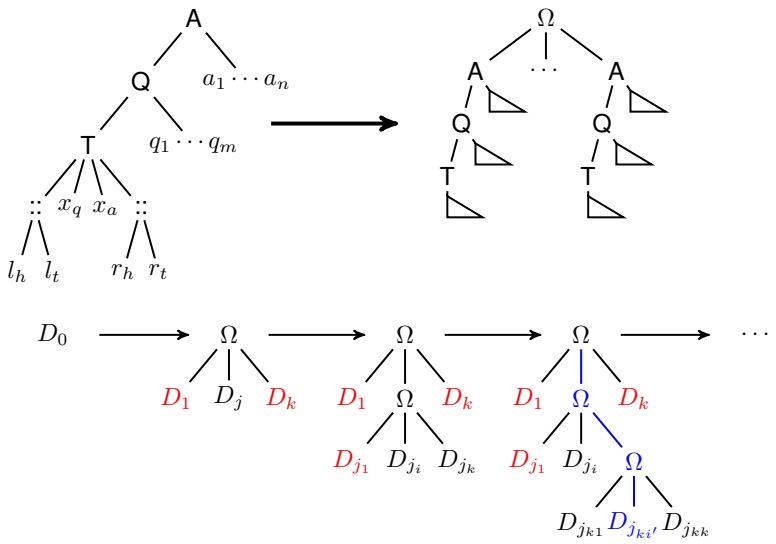
Ici : récriture du premier ordre.
Suffisant ? Oui : Turing complet (cfr poly).
Mieux (pire ?) : indécidable pour 1 seule règle (linéaire gauche).





$(q_k, a_i, a_j, q_l, \blacktriangleright)$

$x_a\sigma$ à la place de a_i
$x_q\sigma$ à la place de q_k



Terminaison : généralités

Automatisation ? $\rightsquigarrow$ correctes, incomplètes...

Toujours difficile.

- $f(f(x)) \to f(x)$.
- $f(a, b, x) \to f(x, x, x)$.
- > 50 règles + théories équationnelles.
- > 1800 règles (> 1000 symboles).
- $\begin{cases} a(a(x)) & \to & b(c(x)) \\ b(b(x)) & \to & a(c(x)) \\ c(c(x)) & \to & a(b(x)) \end{cases}$
- Syracuse...

Terminaison : preuve

Terminaison d'un TRS = bonne fondation de relations (WF) $\rightsquigarrow$ « mesure ».

Comment ? $\mathcal{R} \subseteq O \wedge \mathrm{WF}(O) \Rightarrow \mathrm{WF}(\mathcal{R})$

Transformation de problèmes jusqu'à : pb. trivial, pb. d'inclusion.

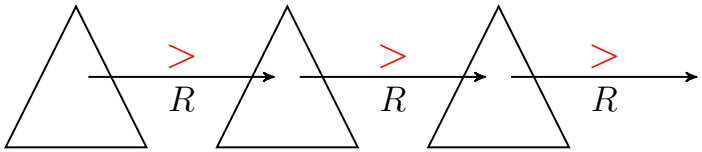
$$\text{RULE NAME(PARAM)}\ \frac{p_1 \cdots p_n}{p}\ \text{CONDITIONS}$$

Transf. correcte et complète : critère $\rightsquigarrow$ contraintes de terminaison.

Inclusion : passage aux contraintes d'ordre.

Terminaison : preuve

Inclusion $\rightarrow_R \subseteq >$: $s > t$ pour tout $s \rightarrow_R t$.



Infinité de $s \rightarrow t \rightsquigarrow$ automatisation ?

Test fini ?

Terminaison : Manna-Ness

Idée : ordre sur règles stable par clôtures donnant la relation.

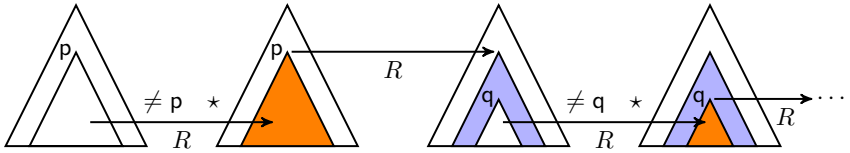
Théorème. (Lankford)

Contraintes très fortes :

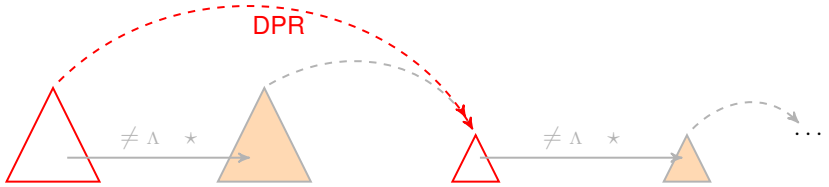
- Complexité ($\rightsquigarrow$ relation),
- Ordres.

En pratique : ordres de simplification (plus facile pour WF)
$f(f(x)) \to f(g(f(x)))$? coincé !

Terminaison : DP



Terminaison : DP



Terminaison : DP

Définition.
Pour un TRS R,
$\mathcal{F} = D \uplus C \quad D : \{f \in \mathcal{F} \mid \exists (l \to r) \in R, l(\Lambda) = f\}$
D : définis (fonctions), C : constructeurs (données).

Définition.
Pour une règle $l \to r$,
paire de dépendance : couple $\langle u, v \rangle$

- $u = l$,
- $v = r|_p$ t.q. $r(p) \in D$.

Pour un TRS R : DP(R).

Terminaison : DP

Ex.

$D = ?$ $\qquad C = ?$

$$\left\{\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} \#0 & \to & \# & & & \\ \# + x & \to & x & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & x1 + y0 & \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & x1 + y1 & \to & ((x+y) + \#1)0 \end{array}\right\}$$

Terminaison : DP

Ex.

$\{f(f(x)) \to f(g(f(x)))\}$ $\quad D = \{f\}$ $\quad C = \{g\}$

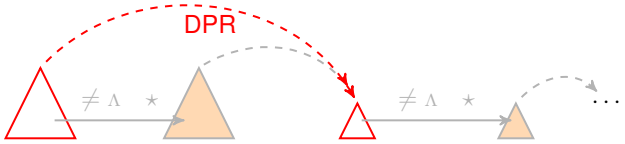
$\langle f(f(x)), f(g(f(x)))\rangle$ $\quad \langle f(f(x)), f(x)\rangle$

Définition.

Chaîne de dépendance : séquence de DP, subst. σ t.q.

$$\cdots \quad \langle u_i, \quad v_i\rangle \qquad \langle u_{i+1}, \quad v_{i+1}\rangle \quad \cdots$$

$$v_i\sigma \xrightarrow{\neq\Lambda\star} u_{i+1}\sigma \quad v_{i+1}\sigma$$



Terminaison : DP

Ex.

$\{f(f(x)) \to f(g(f(x)))\} \quad D = \{f\} \quad C = \{g\}$

$\langle f(f(x)), f(g(f(x)))\rangle \quad \langle f(f(x)), f(x)\rangle$

Définition.

Chaîne de dépendance : séquence de DP, subst. σ t.q.

$$\cdots \quad \langle u_i, \quad v_i\rangle \qquad \langle u_{i+1}, \quad v_{i+1}\rangle \quad \cdots$$
$$v_i\sigma \xrightarrow{\neq\Lambda\star} u_{i+1}\sigma$$

Théorème. (A & G)

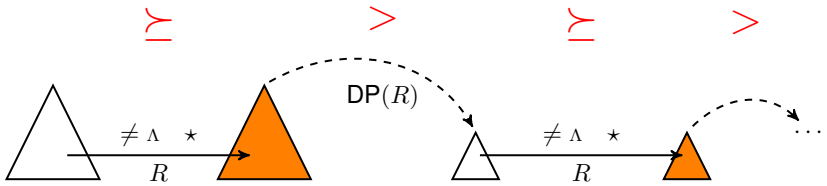
Terminaison : DP

Rq. — $R = \{f(f(x)) \to h(f(x)),\ g(x) \to f(x)\} \qquad D = \{f, g\} \quad C = \{h\}$

$\mathsf{DP}(R) = \{\langle f(f(x)), f(x)\rangle,\ \langle g(x), f(x)\rangle\}$

$\mathsf{SN}(\to_R)$? $\rightsquigarrow$ $\mathsf{SN}(\xrightarrow[R]{\neq\Lambda\star} \cdot \xrightarrow[\mathsf{DP}(R)]{})$? $\qquad$ ($\rightsquigarrow$ $\mathsf{SN}(\twoheadrightarrow_{\mathsf{DP}(R),R})$?)

Terminaison : DP, contrôle



Théorème. (A & G)

Terminaison : DP et marques

Appel récursif : décroissance des arguments.

$\rightsquigarrow$ distinction entre symbole de fonction et appel récursif : marques.

Ex.

$$\left\{\begin{array}{lll@{\qquad}lll} \#0 & \to & \# & & & \\ \# + x & \to & x & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & x1 + y0 & \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & x1 + y1 & \to & ((x+y)+\#1)0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{ll} \langle x1 \mathbin{\widehat{+}} y1, x \mathbin{\widehat{+}} y\rangle & \langle x1 \mathbin{\widehat{+}} y0, x \mathbin{\widehat{+}} y\rangle \\ \langle x0 \mathbin{\widehat{+}} y1, x \mathbin{\widehat{+}} y\rangle & \langle x0 \mathbin{\widehat{+}} y0, x \mathbin{\widehat{+}} y\rangle \\ \langle x0 \mathbin{\widehat{+}} y0, (x+y)\widehat{0}\rangle & \langle x1 \mathbin{\widehat{+}} y1, (x+y) \mathbin{\widehat{+}} \#1\rangle \\ \langle x1 \mathbin{\widehat{+}} y1, ((x+y)+\#1)\widehat{0}\rangle & \end{array}$$

Terminaison : DP et marques

$[\![\#]\!] = 0$	$[\![0]\!](x) = x + 1$	$\neq$	$[\![\widehat{0}]\!](x) = 0$	non mono
$[\![1]\!](x) = x + 1$	$[\![+]\!](x, y) = x$	non mono	$[\![\widehat{+}]\!](x, y) = x$	non mono

Ex.

$$\left\{\begin{array}{lll@{\qquad}lll} \#0 & \to & \# & & & \\ \# + x & \to & x & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x + y)0 & x1 + y0 & \to & (x + y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x + y)1 & x1 + y1 & \to & ((x + y) + \#1)0 \end{array}\right\}$$

$\langle x1 \widehat{+} y1, x \widehat{+} y\rangle$ $\qquad$ $\langle x1 \widehat{+} y0, x \widehat{+} y\rangle$

$\langle x0 \widehat{+} y1, x \widehat{+} y\rangle$ $\qquad$ $\langle x0 \widehat{+} y0, x \widehat{+} y\rangle$

$\langle x0 \widehat{+} y0, (x + y)\widehat{0}\rangle$ $\qquad$ $\langle x1 \widehat{+} y1, (x + y) \widehat{+} \#1\rangle$

$\langle x1 \widehat{+} y1, ((x + y) + \#1)\widehat{0}\rangle$

Terminaison : DP et marques

Ex.

$\{f(f(x)) \to f(g(f(x)))\}$

Terminaison : graphes

Déjà vu : pas n'importe quoi après $\langle u_i, v_i \rangle$

Grossier : $v_i\sigma \xrightarrow[R]{\neq\Lambda\star} u_j\sigma \Rightarrow v_i(\Lambda) \equiv u_j(\Lambda)$

Si R fini alors DP(R) fini $\rightsquigarrow$ graphe fini de la relation entre paires.

Ex.

$$\begin{cases} x - 0 & \to & x \\ s(x) - s(y) & \to & x - y \\ 0 \div s(y) & \to & 0 \\ s(x) \div s(y) & \to & s((x - y) \div s(y)) \end{cases}$$

?

Terminaison : graphes

Maintenant : systèmes FINIS.

Chaîne $\mapsto$ chemin $\rightsquigarrow$ chaîne ∞ $\mapsto$ chemin ∞, ici partie fortement connexe.

Contrôle indépendant des chaînes dans les PFC (circuits).

Ex.

$R = \{f(f(x)) \to h(f(x)),\ g(x) \to f(x)\}$

Terminaison : graphes

- Une relation par PFC $\rightsquigarrow$ un ordre (preuve) par PFC.
- PFC $\neq$ composante.
- PFC $\neq$ circuits élémentaires.
  $\{f(0) \to g(1) \quad f(1) \to g(0) \quad g(x) \to f(x)\}$
- Automatisation : graphe NON calculable $\rightsquigarrow$ approximations.
  - Déjà vu : symb. de tête.
  - Plus fin : discriminer par chapeau constructeur (REN/CAP).
    CAP : variable fraîche par défini, REN : renommage,
    s connectable à t si REN(CAP(s)) et t unifiables.

Théorème.

Terminaison : graphes

Théorème. (A,G & O)

Toutes PFC : très lourd $\rightsquigarrow$ par composantes ?

Corollaire.