Techniques de récriture

Xavier Urbain

ENSIIE 3 – Programmation raisonnée

Termes

Signature : triplet $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \tau)$

- $\mathcal{S}$: ensemble $\neq \emptyset$ de sortes
- $\mathcal{F}$: ensemble de symboles
- τ : fonction $\mathcal{F} \to \mathcal{S}^{\mathbb{N}_+}$,

$$f \in \mathcal{F} \mapsto s_1 \times \ldots \times s_n \to s$$

n : arité de f

Termes

$(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \tau)$,
$X = \cup_{s \in \mathcal{S}} X_s$: ensemble de variables

$\mathcal{T}(\mathcal{F}, X)$: plus petit ensemble tel que

- $x \in X_s$ terme de sorte s
- $f \in \mathcal{F}$, $f : s_1 \times \ldots \times s_n \to s$,
  $t_1 : s_1, \ldots \times t_n : s_n$
  $f(t_1, \ldots, t_n)$ terme de sorte s

Termes clos : $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \emptyset)$

Arbres $\leadsto$ définition alternative : avec des positions attention aux infinis

Termes

Définition du sous-terme en fonction des positions

Sous-terme de t à position p, $t|_p$, défini par l'ensemble de positions :
$\{q \in \mathbb{N}_+^* \mid p \cdot q \in \mathcal{P}os(t)\}$

$$t|_p(q) = t(p \cdot q)$$

Rq. — Sorte de $t|p$: codomaine de $t(p)$

Si $t|_p$, $(p \in \mathcal{P}os(t))$ et u de même sorte,
Remplacement $t[u]_p$, défini par l'ensemble de positions :
$\{q \in \mathbb{N}_+^* \mid q \in \mathcal{P}os(t) \bigwedge p \not\leq_{\text{préf.}} q\} \cup \{p \cdot q \mid q \in \mathcal{P}os(u)\}$

$$t[u]_p(q) = t(q) \qquad \text{si } q \in \mathcal{P}os(t) \bigwedge p \not\leq_{\text{préf.}} q$$
$$t[u]_p(p \cdot q) = u(q)$$

Termes : substitutions

Substitution : application $X \to \mathcal{T}(\mathcal{F}, X)$ conservant les sortes
Généralement : identité sauf sur un ensemble fini

Notation postfixée

Extension naturelle unique aux termes

Renommage : rel. d'équiv. analogue à l'α-conversion

$$\sigma = \{x_1 \mapsto y_1, \cdots, x_n \mapsto y_n\} \qquad y_i \text{ distincts deux à deux}$$

Termes : $\mathcal{F}$-algèbres

Sémantique associée

Pour une signature $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \tau)$, $\mathcal{F}$-algèbre, n-uplet constitué

- Supports $A_s \neq \emptyset$ pour tout $s \in \mathcal{S}$
- Interprétation $f_A : A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n} \to A_s$
  pour tout $f \in \mathcal{F}, f : s_1 \times \cdots \times s_n \to s$

Homomorphisme : ensemble d'applications $h_s : A_s \to B_s$ t.q.

$$\forall a_1, \cdots, a_n \in A, \quad h_s(f_A(a_1, \cdots, a_n)) = f_B(h_{s_1}(a_1), \cdots, h_{s_n}(a_n))$$

Termes : $\mathcal{F}$-algèbres

Équation : paire de termes de même sorte, $s = t$

Modèle : $\mathcal{F}$-algèbre A, ensemble d'équations E
$A \models E$ si pour tout $s = t \in E$, pour toute A-assignation σ, $s\sigma = t\sigma$

$=_E$ plus petite congruence sur $\mathcal{T}(\mathcal{F}, X)$ t.q.

$$\forall \sigma \quad \forall s = t \in E \quad s\sigma =_E t\sigma$$

Existe, unique

En particulier $\mathcal{T}(\mathcal{F}, X)/ =_E \models E$

Théorème.
E ensemble fini d'équations, $A \models E$, au moins un f par sorte dans $\mathcal{F}$ alors unique homomorphisme $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \emptyset)/ =_E \rightarrow A$

Termes : problème du mot

$\mathcal{T}(\mathcal{F}, X)$, E ensemble fini d'équations, $s = t$ équation
Problème du mot associé à $s = t$:

$$E \models s = t \text{ ?}$$

Tout modèle de E aussi modèle de $s = t$?

Pour le résoudre : raisonnement équationnel

Raisonnement équationnel

Exemple.

$$\begin{array}{rcl} x \cdot e & = & x \\ x \cdot x^{-1} & = & e \\ (x \cdot y) \cdot z & = & x \cdot (y \cdot z) \end{array}$$

$$e \cdot x = x \text{ ?}$$

... réflexivité, symétrie, transitivité, remplacement ... : dérivation

$$E \vdash s = t$$

Raisonnement équationnel

Théorème. (Birkoff)
Si au moins un terme clos par sorte alors

$$E \vdash s = t \quad \Leftrightarrow \quad E \models s = t \quad \Leftrightarrow \quad s =_E t$$

Récriture

Règle de récriture : couple de termes $s \rightarrow t$

$$s \xrightarrow[l \rightarrow r, \sigma]{p} t \quad \text{si} \quad s|_p \equiv l\sigma \quad t \equiv s[r\sigma]_p$$

Système de récriture : ensemble de règles

$\underset{R}{\rightarrow}$: $s \underset{R}{\rightarrow} t$ ssi $\exists l \rightarrow r \in R, \exists p \in \mathcal{P}os(s), \exists \sigma, s \xrightarrow[l \rightarrow r, \sigma]{p} t$

En fait, extension monotone et stable du système

Clôture réflexive/transitive : $\underset{R}{\rightarrow}^{*}$

Clôture transitive : $\underset{R}{\rightarrow}^{+}$

Récriture : exemple de calcul

Arithmétique binaire

Représentation de 6 : $\#110$.

$$\left\{ \begin{array}{lcllcl} \#0 & \rightarrow & \# & & & \\ \# + x & \rightarrow & x & x + \# & \rightarrow & x \\ x0 + y0 & \rightarrow & (x+y)0 & x1 + y0 & \rightarrow & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \rightarrow & (x+y)1 & x1 + y1 & \rightarrow & ((x+y) + \#1)0 \end{array} \right.$$

Récriture : exemple de calcul

- Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y\}$;
- Signature : $\mathcal{F} = \{\#\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\}$;
- Ensemble de règles.

$$\begin{cases} \#0 & \to & \# & & & \\ \# + x & \to & x & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & x1 + y0 & \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & x1 + y1 & \to & ((x+y)+\#1)0 \end{cases}$$

Récriture : exemple de calcul

- Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y\}$;
- Signature : $\mathcal{F} = \{\#\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\}$;
- Ensemble de règles.

$$\begin{cases} \#0 & \to & \# & & & \\ \# + x & \to & x & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & x1 + y0 & \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & x1 + y1 & \to & ((x+y)+\#1)0 \end{cases}$$

Relation $\to$ monotone : si $s \to t$ alors $C[s] \to C[t]$;

Récriture : exemple de calcul

- Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y\}$;
- Signature : $\mathcal{F} = \{\#\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\}$;
- Ensemble de règles.

$$\begin{cases} \#0 & \to & \# & & & \\ \# + x & \to & x & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & x1 + y0 & \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & x1 + y1 & \to & ((x+y)+\#1)0 \end{cases}$$

Relation $\to$ monotone : si $s \to t$ alors $C[s] \to C[t]$;
stable : si $s \to t$ alors $s\sigma \to t\sigma$.

Récriture : exemple de calcul

- Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y\}$;
- Signature : $\mathcal{F} = \{\#\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\}$;
- Ensemble de règles.

$$\begin{cases} \#0 & \to & \# & & & \\ \# + x & \to & x & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & x1 + y0 & \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & x1 + y1 & \to & ((x+y)+\#1)0 \end{cases}$$

$$\#10 + \#1$$

Récriture : exemple de calcul

- Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y\}$;
- Signature : $\mathcal{F} = \{\#\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\}$;
- Ensemble de règles.

$$\begin{cases} \#0 & \to & \# & & & \\ \# + x & \to & x & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & x1 + y0 & \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & x1 + y1 & \to & ((x+y)+\#1)0 \end{cases}$$

$$\#10 + \#1 \to (\#1 + \#)1$$

Récriture : exemple de calcul

- Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y\}$;
- Signature : $\mathcal{F} = \{\#\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\}$;
- Ensemble de règles.

$$\begin{cases} \#0 & \to & \# & & & \\ \# + x & \to & x & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & x1 + y0 & \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & x1 + y1 & \to & ((x+y)+\#1)0 \end{cases}$$

$$\#10 + \#1 \to (\#1 + \#)1 \to (\#1)1$$

Récriture : exemple de calcul

- Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y\}$;
- Signature : $\mathcal{F} = \{\#\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\}$;
- Ensemble de règles.

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \#0 & \to & \# & & & & \\ \# + x & \to & x & & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & & x1 + y0 & \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & & x1 + y1 & \to & ((x+y) + \#1)0 \end{array}\right.$$

$\#10 + \#1 \to (\#1 + \#)1 \to \#11$ Stop

Récriture

Puissance de calcul : Turing complet

Questions :

- Existence du résultat $\rightsquigarrow$ terminaison
- Unicité du résultat $\rightsquigarrow$ confluence, convergence

Récriture

t forme normale pour R si aucun u tel que $t \underset{R}{\to} u$

t forme normale de s pour R si aucun u tel que $t \underset{R}{\to} u$ et $s \underset{R}{\to}^{\star} t$
$\rightsquigarrow$ s normalisable

Système normalisant si tout terme normalisable

Système fortement normalisant si tout calcul mène à une forme normale (si tout terme accessible par $\underset{R}{\to}$)

Terminaison : approche classique

$$\cdot \xrightarrow{>} \cdot \xrightarrow{>} \cdot \xrightarrow{>} \cdot \xrightarrow{>} \dots \text{ Stop}$$

Terminaison : approche classique

Théorème.
Équivalence :

- R est fortement normalisant ;
- Existence de $>$ bien fondé tel que $\to_R \subseteq >$.

Terminaison : approche classique

Corollaire. (Manna & Ness)
Équivalence :

- R est fortement normalisant ;
- Existence de $>$ bien fondé, monotone, stable tel que
  Pour toute $l \to r \in R$, $l > r$.

Terminaison : ordres

Quels ordres ?

- Ordres sémantiques (interprétations)
  - Entiers
  - Polynômes
  - ...
- Ordres syntaxiques (extensions aux termes)
  - LPO
  - MPO
  - RPO
  - ...
- Par transformation

Terminaison : ordres

$D \neq \emptyset$ domaine muni de $\geq_D$ et $>_D = \geq_D - \leq_D$
$\varphi : t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \emptyset) \mapsto d \in D$
$\succeq_\varphi$ et $>_\varphi$:

$$\begin{array}{lcl} t_1 \succeq_\varphi t_2 & \text{ssi} & \varphi(t_1) \geq_D \varphi(t_2) \\ t_1 >_\varphi t_2 & \text{ssi} & \varphi(t_1) >_D \varphi(t_2) \end{array}$$

Bien fondé si $>_D$ bien fondé

Extension aux termes non clos : $\varphi : t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, X) \mapsto d \in (X \to D) \to D$
$\succeq_\varphi$ et $>_\varphi$:

$$\begin{array}{lcl} t_1 \succeq_\varphi t_2 & \text{ssi} & \varphi(t_1) \succeq_{D,X} \varphi(t_2) \\ t_1 >_\varphi t_2 & \text{ssi} & \varphi(t_1) >_{D,X} \varphi(t_2) \end{array}$$

Terminaison : ordres

Interprétation homomorphique Pour tout f d'arité n, une fonction
$[\![f]\!]_\varphi : D^n \to D$,
pour tout $\rho \in X \to D$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi(f(t_1, \ldots, t_n))(\rho) & = & [\![f]\!]_\varphi(\varphi(t_1)(\rho), \ldots, \varphi(t_n)(\rho)) \\ \varphi(x)(\rho) & = & \rho(x) \end{array}$$

Stables
Monotonie dépendant de $[\![f]\!]$

Interprétation polynomiales si $D = \mathbb{N}$ et $[\![f]\!]$ polynômes

Terminaison : approche classique

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} \#0 & \to & \# & & & & \\ \# + x & \to & x & & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & & x1 + y0 & \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & & x1 + y1 & \to & ((x+y) + \#1)0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcllcl} [\![\#]\!] & = & 1 & [\![0]\!](x) & = & x+1 \\ [\![1]\!](x) & = & x+3 & [\![+]\!](x,y) & = & y+x \end{array}$$

Terminaison : approche classique

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} \#0 & \to & \# & & & & \\ \# + x & \to & x & & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & & x1 + y0 & \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & & x1 + y1 & \to & ((x+y) + \#1)0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcllcl} [\![\#]\!] & = & 1 & [\![0]\!](x) & = & x+1 \\ [\![1]\!](x) & = & x+3 & [\![+]\!](x,y) & = & y+x \end{array}$$

$[\![x0 + y1]\!] = x + y + 4 \quad > \quad [\![(x+y)1]\!] = x + y + 3$

Terminaison : ordres

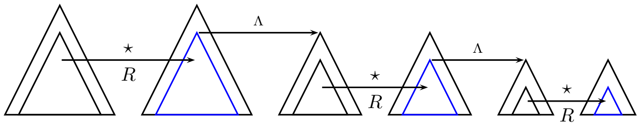
Extension d'ordres sur les symboles (précédences) aux termes

RPO : $s \succeq_{\text{RPO}} t$ si et seulement si

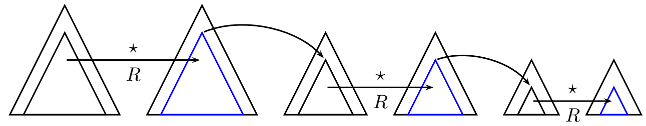
- $s = x \in X$ et $t = x$ ou
- $s = f(s_1, \ldots, s_n)$ avec $f \in \mathcal{F}$ et
  - $s_i \succeq_{\text{RPO}} t$ pour un i, $1 \leq i \leq n$ ou
  - $t = g(t_1, \ldots, t_m)$ avec $g \in \mathcal{F}$ et
    - $f \succ g$ et pour tout j, $1 \leq j \leq m$, $s \succ_{\text{RPO}} t_j$ ou
    - $f \simeq g$ et
      - $\text{ST}(f) =$ mul et $\{s_1, \ldots, s_n\}(\succeq_{\text{RPO}})_{\text{mul}}\{t_1, \ldots, t_m\}$ ou
      - $\text{ST}(f) =$ lex donc $n = m$ et $(s_1, \ldots, s_n)(\succeq_{\text{RPO}})_{\text{lex}}(t_1, \ldots, t_m)$ avec pour tout j, $1 \leq j \leq m$, $s \succ_{\text{RPO}} t_j$ et $s \succ_{\text{RPO}} t$ si $s \succeq_{\text{RPO}} t$ et $t \not\succeq_{\text{RPO}} s$

Stable, monotone, bien fondé si précédence bien fondée

Terminaison : paires de dépendance (Arts & Giesl 97)



Terminaison : paires de dépendance



Terminaison : paires de dépendance

Définition.
$R(\mathcal{F})$.
$\langle l, r' \rangle$ paire de dépendance du système R :

- $l \to r \in R$,
- r' sous-terme de r tel qu'il existe $u \to v \in R$ avec $\Lambda(r') = \Lambda(u)$.

DP(R) : paires de dépendance de toutes les règles de R.

Terminaison : paires de dépendance

Définition.
Chaîne de dépendance de R :

$$s_1 \xrightarrow{\text{DP}(R)} t_1 \xrightarrow[R]{\star} s_2 \xrightarrow{\text{DP}(R)} t_2 \xrightarrow[R]{\star} s_3 \xrightarrow{\text{DP}(R)} \dots$$

Théorème. (Arts & Giesl)
Équivalence :

- R fortement normalisant ;
- Aucune chaîne de R infinie.

Terminaison : paires de dépendance

$$s_1 \xrightarrow{>} t_1 \xrightarrow{\geq\ \star} s_2 \xrightarrow{>} t_2 \xrightarrow{\geq\ \star} s_3 \xrightarrow{>} \dots$$

Corollaire. (Arts & Giesl)
Équivalence :

- R fortement normalisant ;
- Existence de $>$ bien fondé, $\geq$ monotone, $>$ et $\geq$ stables, tel que :
  - Pour toute $l \to r \in R$, $l \geq r$,
  - Pour toute $\langle s, t \rangle \in$ DP(R), $s > t$.

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{lll lll} \#0 & \to & \# & & & \\ \# + x & \to & x & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & x1 + y0 & \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & x1 + y1 & \to & ((x+y)+\#1)0 \\ \# \times x & \to & \# & x \times \# & \to & \# \\ x0 \times y & \to & (x \times y)0 & x1 \times y & \to & (x \times y)0 + y \end{array} \right.$$

$\langle x1 \times y, x \times y \rangle$ $\langle x1 \times y, (x \times y)0 \rangle$ $\langle x1 \times y, (x \times y)0 + y \rangle$
$\langle x0 \times y, x \times y \rangle$ $\langle x0 \times y, (x \times y)0 \rangle$ $\langle x1 + y1, x + y \rangle$
$\langle x1 + y0, x + y \rangle$ $\langle x0 + y1, x + y \rangle$ $\langle x0 + y0, x + y \rangle$
$\langle x0 + y0, (x+y)0 \rangle$ $\langle x1 + y1, (x+y) + \#1 \rangle$
$\langle x1 + y1, ((x+y) + \#1)0 \rangle$

Exemple.

$$\begin{cases} \#0 & \to & \# & & & \\ \# + x & \to & x & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & x1 + y0 & \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & x1 + y1 & \to & ((x+y)+\#1)0 \\ \# \times x & \to & \# & x \times \# & \to & \# \\ x0 \times y & \to & (x \times y)0 & x1 \times y & \to & (x \times y)0 + y \end{cases}$$

$$\begin{array}{lcl lcl} [\![\#]\!] & = & 0 & [\![0]\!](x) & = & x+1 \\ [\![1]\!](x) & = & x+2 & [\![+]\!](x,y) & = & y+x \\ [\![\times]\!](x,y) & = & xy+2x & & & \end{array}$$

Confluence

Paire critique : $r\rho\sigma = (l\rho[d]_p)\sigma$ où

- $l \to r \in R, \quad g \to d \in R$
- p position non variable de l
- ρ renommage de l
- σ unificateur principal de $l|_p$ et g (unifiables !)

Ensemble des paires critiques de R : $\mathrm{PC}(R)$

Confluence

Théorème.
Confluence locale des paires de $\mathrm{PC}(R)$ $\Leftrightarrow$ confluence locale de R

Théorème. (Lemme de Newman)
Si $\underset{R}{\longrightarrow}$ fortement normalisante alors confluence locale $\Leftrightarrow$ confluence

Dém. par induction bien fondée sur $\underset{R}{\longleftarrow}$

$\rightsquigarrow$ Test fini pour les systèmes fortement normalisants !

Complétion

Très souvent R non confluent : paire critique non confluente.

Exemple.

$$\begin{array}{lcl} x+0 & \to & x \\ x+x^{-1} & \to & 0 \\ (x+y)+z & \to & x+(y+z) \end{array}$$

Complétion

Très souvent R non confluent : paire critique non confluente.

Exemple.

$$\begin{array}{lcl} x+0 & \to & x \\ x+x^{-1} & \to & 0 \\ (x+y)+z & \to & x+(y+z) \end{array}$$

$$x+(x^{-1}+z) \quad \leftarrow \quad (x+x^{-1})+z \quad \rightarrow \quad 0+z$$

Complétion

Très souvent R non confluent : paire critique non confluente.

Exemple.

$$\begin{array}{lcl} x+0 & \to & x \\ x+x^{-1} & \to & 0 \\ (x+y)+z & \to & x+(y+z) \end{array}$$

$$x+(x^{-1}+z) \quad \leftarrow \quad (x+x^{-1})+z \quad \rightarrow \quad 0+z$$

Idée : ajouter $\quad x+(x^{-1}+z) \quad \rightarrow \quad 0+z$

Complétion

Constructeur de preuves :

- $s \xleftrightarrow[l=r]{p} t$ $\quad s = l\sigma$
- $s \xrightarrow[l\to r]{p} t$ $\quad s = l\sigma$
- $t \xleftarrow[l\to r]{p} s$ $\quad s = l\sigma$
- Concaténation $\quad$ (associative, nil)

Complétion

Exemple.

$$
\begin{aligned}
e \cdot x \quad & \xleftrightarrow[N]{2} e \cdot (x \cdot e) \xleftrightarrow[I]{22} e \cdot (x \cdot (x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1})) \xleftrightarrow[A]{2} e \cdot ((x \cdot x^{-1}) \cdot (x^{-1})^{-1}) \\
& \xleftrightarrow[I]{21} e \cdot (e \cdot (x^{-1})^{-1}) \xleftrightarrow[A]{\Lambda} (e \cdot e) \cdot (x^{-1})^{-1} \xleftrightarrow[N]{1} e \cdot (x^{-1})^{-1} \\
& \xleftrightarrow[I]{1} (x \cdot x^{-1}) \cdot (x^{-1})^{-1} \xleftrightarrow[A]{\Lambda} x \cdot (x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1}) \xleftrightarrow[I]{2} x \cdot e \\
& \xleftrightarrow[N]{\Lambda} x
\end{aligned}
$$

Complétion

$$s \xleftrightarrow[(E,R)]{\star} t$$

Passage de s à t par étapes équationnelles et orientées

But : passage de $s \xleftrightarrow[(E,\emptyset)]{\star} t$ à $s \xrightarrow[(\emptyset,R^\infty)]{\star} \cdot \xleftarrow[(\emptyset,R^\infty)]{\star} t$

Donc élimination des étapes :

- Équationnelles
- Pics
- $\xrightarrow[l\to r]{}$ si $l \to r$ réductible (meilleures propriétés)

Complétion : règles I

Crit. Pair $\quad \dfrac{E, R}{E \cup \{p\}, R}$ si $p \in \mathrm{PC}(R)$

Orient $\quad \dfrac{E \cup \{u = v\}, R}{E, R \cup \{u \to v\}}$ si $u > v$

Delete $\quad \dfrac{E \cup \{u = u\}, R}{E, R}$

Complétion : règles II

Simplify $\quad \dfrac{E \cup \{u = v\}, R}{E \cup \{u' = v\}, R}$ si $u \to_R u'$

Compose $\quad \dfrac{E, R \cup \{u \to v\}}{E, R \cup \{u \to v'\}}$ si $v \to_R v'$

Collapse $\quad \dfrac{E, R \cup \{u \to v\}}{E \cup \{u' = v\}, R\}}$ si $u \to_{l\to r} u'$ $(l \to r \in R)$ et $|u| > |l|$ ou $(|u| = |l|$ et $v > r)$

Complétion

Utilisation par saturation

Choix d'une séquentialisation : stratégie $\rightsquigarrow$ complétion particulière

$$(E_0, \emptyset) \vdash (E_1, R_1) \vdash \cdots \vdash (E_n, R_n) \vdash \cdots$$

$$E^\star = \bigcup_i E_i \qquad E^\infty = \bigcup_n \bigcap_{i \geq n} E_i$$

$$R^\star = \bigcup_i E_i \qquad R^\infty = \bigcup_n \bigcap_{i \geq n} R_i$$

Complétion

Succès fini : $\exists n \mid E_n = \emptyset$, toutes inférences faites ($\rightsquigarrow\ R^\infty = R_n$)

Succès infini : $E^\infty = \emptyset, R^\infty$

Échec fini : $\exists n \mid E_n \neq \emptyset$, toutes inférences faites

Échec infini : $E^\infty \neq \emptyset$

Complétion

Succès fini : $\exists n \mid E_n = \emptyset$, toutes inférences faites ($\rightsquigarrow\ R^\infty = R_n$)

Succès infini : $E^\infty = \emptyset, R^\infty$

Échec fini : $\exists n \mid E_n \neq \emptyset$, toutes inférences faites

Échec infini : $E^\infty \neq \emptyset$

- Succès $\Rightarrow$ preuve par récriture en temps fini ?
- Dépendance résultat/stratégie ?
- Dépendance finitude/stratégie ?

Complétion

Stratégies quelconques $\supset$ équitables $\supset$ simplifiantes

Équitables : preuve $\mapsto$ preuve par récriture en tps fini
avec résultat indépendant.

Simplifiantes : finitude indépendante.

Théorème.

$$s \xleftrightarrow[E_i \cup R_i]{\star} t \quad \text{ssi} \quad \exists j \geq i \mid s \xrightarrow[R_j]{\star} \cdot \xleftarrow[R_j]{\star} t \quad \text{avec } R_j \text{ persistantes}$$

en cas de succès

Corollaire.
R^∞ canonique