

# Un schéma numérique pour le Quantile Hedging [1]

Cyril Bénézet. Jean-François Chassagneux. Christoph Reisinger.

LaMME, ENSIIE. LPSM, Université de Paris. Mathematical Institute, University of Oxford.

## Objectifs

Dans ce travail, nous considérons le problème de **sur-réplication avec probabilité  $p$  (quantile hedging)** pour des options Européennes dans un marché Markovien non-linéaire.

- La fonction de prix associée est l'unique solution d'une **équation aux dérivées partielles** au sens de la viscosité.
- Nous définissons des **schémas numériques** pour approcher cette fonction de prix.
- Nous prouvons la **convergence** de ces schémas.
- Nous donnons des **exemples numériques**.

## Introduction

En finance et assurance, la **valorisation par sur-réplication** est l'une des techniques les plus courantes pour attribuer un prix à des produits dérivés ou optionnels. Dans le domaine de l'assurance, les produits sont souvent complexes, avec des notions importantes et des maturités très longues voire infinies. La sur-réplication donne alors des **prix trop élevés** voire infinis, et les assureurs cherchent à réduire ces prix pour intéresser les clients.

Une façon de faire cela est de considérer un prix de **couverture partielle**, ou l'on relâche l'hypothèse de sur-réplication : une stratégie de couverture associée ne permet pas de sur-répliquer le produit dans tous les états du monde, mais seulement de satisfaire à une certaine mesure de risque. Par exemple, on peut demander à sur-répliquer avec probabilité  $p \in [0, 1]$  : c'est le problème de **quantile hedging**.

Dans un marché Markovien non-linéaire, le prix de quantile hedging, en fonction de la date initiale, de la valeur du sous-jacent et de  $p$ , est l'unique solution de viscosité d'une **EDP non-linéaire de type Hamilton-Jacobi-Bellman**. On définit et prouve la convergence de **schémas numériques** approchant le prix de quantile hedging.

## Cadre

**Actif risqué** : son **log-prix** évolue selon la dynamique

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

**Processus de richesse** : étant donnée une stratégie d'investissement  $\nu$  représentant le cash investi dans l'actif risqué, il évolue selon

$$dY_t = f(t, X_t, Y_t, \nu_t)dt + \nu_t \sigma(X_t)dW_t$$

La **fonction de prix de quantile hedging**, pour une option Européenne de **maturité  $T$**  et **payoff  $g(X_T)$** , est alors

$$v(t, x, p) = \inf \{y \geq 0 \mid \exists \nu, \mathbb{P}[Y_T^{t,x,y,\nu} \geq g(X_T^{t,x})] \geq p\}.$$

## Résultat préliminaire

La fonction  $v$  est (voir Bouchard, Elie, Touzi 2009 et Bouveret, Chassagneux 2017) l'unique solution de viscosité de l'équation aux dérivées partielles de type HJB suivante, sur  $[0, T) \times \mathbb{R}^d \times (0, 1)$ ,

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{1 + |a|^2} \left( -\partial_t v - b' D_x v - \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma \sigma' D_x^2 v] - a' \sigma' D_{x,p}^2 v - \frac{|a|^2}{2} \partial_{pp}^2 v - f(\cdot, v, D_x v \sigma + \partial_p v a) \right) = 0,$$

avec les conditions au bord  $v(T, \cdot) = p \times g(x)$ ,  $v(\cdot, 0) = 0$  et  $v(\cdot, 1) = V$  le prix de sur-réplication de  $g(X_T)$ .

## Conclusion

Dans ce travail, nous avons construit et prouvé la convergence de schémas numériques pour approcher le prix de sur-réplication avec probabilité  $p$  pour une option Européenne dans un marché potentiellement non-linéaire.

L'implémentation numérique du schéma est simple et il converge sous des conditions de compatibilité entre les paramètres, obtenues théoriquement et se révélant nécessaires en pratique également.

Nous étudions de plus la convergence de **schémas non-monotones**, dans le cas où l'interpolation n'est pas linéaire mais cubique spline. On démontre convergence de ce schéma non-monotone dans certains cas.

## Pistes de recherche

- Obtenir une **vitesse de convergence**  $\leftrightarrow$  travail en cours.
- Construction de schémas numériques basés sur les **réseaux de neurones**  $\leftrightarrow$  travail en cours avec M. Allouche, doctorant au CMAP.
- Extension des résultats théoriques et numériques dans un cas **non-Markovien**  $\leftrightarrow$  "weak BSDEs".
- Extension des résultats aux **options Américaines**.

## Référence

[1] Cyril Bénézet, Jean-François Chassagneux, and Christoph Reisinger. A numerical scheme for the quantile hedging problem. *arXiv preprint arXiv:1902.11228*, 2019. (En presse) A paraître dans le SIAM Journal on Financial Mathematics.

## Acknowledgements

Ce travail a été partiellement financé dans le cadre du projet de recherche "**Advanced techniques for non-linear pricing and risk management of derivatives**", sous l'égide de l'Institut Europlace de Finance, avec le soutien du Fond pour la Recherche d'AXA.

## Contact Information



Bureau 246

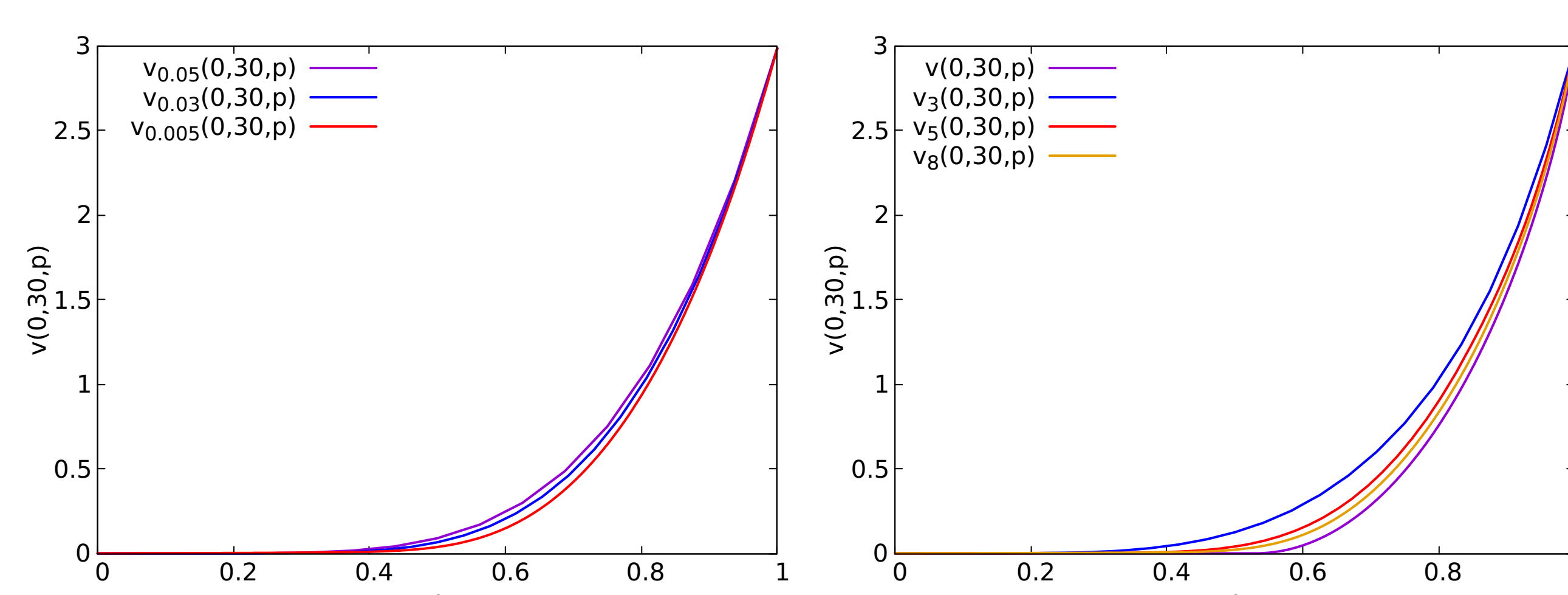
## Un schéma numérique monotone

Trois étapes:

- 1 **Discrétisation** de l'espace des contrôles  $\mathbb{R}^d \hookrightarrow K_n = [-n, n]^d \cap \frac{\mathbb{Z}^d}{n}$ .
- 2 Schéma rétrograde **PCPT** (Piecewise Constant Policy Timestepping, voir Krylov 1999 et 2000). Soit  $\pi = \{0 = t_0 < \dots < t_\kappa = T\}$ .
  - On pose  $w_n(T, x, p) := p \times g(x)$ .
  - Soit  $0 \leq k < \kappa$ , on suppose  $w_n(t_{k+1}, \cdot)$  connue. Pour tout  $a \in K_n$ , soit  $w_n^{a,k}$  la solution, sur  $[t_k, t_{k+1}) \times \mathbb{R}^d \times (0, 1)$ , de
$$-\partial_t v - b' D_x v - \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma \sigma' D_x^2 v] - a' \sigma' D_{x,p}^2 v - \frac{|a|^2}{2} \partial_{pp}^2 v - f(\cdot, v, D_x v \sigma + \partial_p v a) = 0,$$
avec les conditions au bord  $w_n^{a,k}(t_{k+1}, \cdot) = w_n(t_{k+1}, \cdot)$ ,  $w_n^{a,k}(\cdot, 0) = 0$ ,  $w_n^{a,k}(\cdot, 1) = V$ .
  - On définit alors  $w(t, x, p) := \min_{a \in K_n} w_n^{a,k}(t, x, p)$  sur  $[t_k, t_{k+1}) \times \mathbb{R}^d \times [0, 1]$ .
- 3 Lorsque  $X$  est un Brownien avec dérive en dimension 1, on peut coupler le schéma temporel précédent à un **schéma aux différences finies implicites** pour approcher  $w_n^{a,k}$  pour tout  $0 \leq k < \kappa$  et  $a \in K_n$ . Il faut une **interpolation** linéaire de chaque  $w_n^{a,k}$ ,  $a \in K_n$  pour obtenir  $w$  en  $t_k$ .

## Résultats et numérique

- Soit  $v_n$  la solution de l'EDP avec espace des contrôles  $K_n$  (i.e. l'on maximise sur  $K_n$  au lieu de  $\mathbb{R}^d$ ). Alors  $v_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} v$  uniformément sur les compacts.
- Soit  $n \geq 0$  et  $\pi \subset [0, T]$  une grille discrète. Le schéma PCPT admet une unique solution  $w_{n,\pi}$  et  $w_{n,\pi} \rightarrow_{|\pi| \rightarrow 0} v_n$ .
- Soit de plus  $\delta$  un paramètre de discrétisation spatiale. Le schéma PCPT avec différences finies admet une unique solution  $w_{n,\pi,\delta}$  convergeant vers  $v_n$  lorsque  $|\pi| + \delta \rightarrow 0$  dans l'espace des paramètres compatibles.



**Gauche**, cas non-linéaire :  $n$  fixé, convergence vers  $v_n$ .

**Droite**, cas linéaire : Convergence vers  $v$  en faisant varier  $\pi$ ,  $\delta$  et  $n$ .